

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier E. Stiefel

F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

BRAMBLE, J. H.: A Sphere Theorem for the Equations of Elasticity	1
CHANG, I.: On the Wall Effect Correction of the Stokes Drag Formula for Axially Symmetric Bodies Moving Inside a Cylindrical Tube	6
KIRCHGÄSSNER, K.: Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten	14
LEWIS, J. A., and POLLAK, H. O.: Photoelastic Calculations by a Complex Variable Method	30
UGRIN-SPARAC, D.: Design of Large Permanent Magnets with Rotationally Symmetrical Poles	38
ZIEGLER, H.: Über den Zusammenhang zwischen der Fliessbedingung eines elastisch-plastischen Körpers und seinem Fliessgesetz	53

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

GILBERT, R. P., and KENDALL, H.: A Further Note on a Two-Dimensional Free-Boundary Problem	69
JACCARD, C., et LEVI, L.: Ségrégation d'impuretés dans la glace	70
KATZ, U.: On the Temperature and Humidity Dependence of the Ice Forming Activity of Silver Iodide	76
PAHOR, S., and STERNAD, J.: Heat Transfer from Laminar Flow Through Cylindrical Tubes.	80
WEYMAN, H. D.: Electron Density Distribution in a Cylinder	82

Varia - Miscellaneous - Divers

Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma in New York City	86
Mathematisches Symposium des internationalen Rechenzentrums der UNESCO (PICC) in Rom, 22. bis 24. September 1960.	86
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	87

ZAMP	Vol. XII	Fasc. 1	Pag. 1-88	25. 1. 61
------	----------	---------	-----------	-----------

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmassstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 30.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 46.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 57.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hand of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw.Frs. 30.- per page for pages 17-24, Sw.Frs. 46.- per page for pages 25-32, and Sw.Frs. 57.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata printed without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. Le légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages imprimées, une *contribution* de frs.s. 30.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 46.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de frs.s. 57.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement, Annual subscription, Abonnement annuel:

(6 Nummern, 6 issues, 6 numéros) sFr. 78.- (DM 78.-)

Einzelnnummer, single copy, le numéro, sFr. 16.-

Inserate - Advertisements - Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: sFr./DM 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: sFr./DM 88.-
 $\frac{3}{4}$ Seite/page: sFr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

5856-21

A Sphere Theorem for the Equations of Elasticity

By JAMES H. BRAMBLE, White Oak, Silver Spring, Maryland, U.S.A.¹⁾,
and College Park, Maryland, U.S.A.²⁾

1. Introduction

In two recent papers [3, 4]³⁾, COLLINS gave expressions for stresses due to elastic distributions in an infinite isotropic elastic solid, bounded internally by a spherical hollow and a rigid spherical inclusion, respectively. These expressions were given in terms of the corresponding stresses due to the same distributions in an infinite unbounded solid, the singularities of the distributions lying outside the sphere.

In this paper the more general problem of the sphere with an elastically supported boundary is treated. We give here the solutions for the interior problem, rather than the exterior problem, although the two are not essentially different. The free and fixed boundary cases, given by COLLINS, are limiting cases of the elastically supported boundary. These are included here also since the forms of the solutions are quite different from those given by COLLINS. The components of displacement and stress are dealt with in rectangular coordinates and because of the symmetry of the sphere the three components of the displacement vector are given as a single indexed quantity.

2. The Sphere Theorem

The notation u_i and τ_{ij} will be used to denote the components of displacement and stress, respectively, in rectangular coordinates (x_1, x_2, x_3) . A comma preceding a subscript will mean partial differentiation with respect to the appropriate independent variable and summation will be implied when an index is repeated, e.g.

$$u_{i,i} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

The symbol Δ will denote the Laplace operator.

Let u_i^0 and τ_{ij}^0 be the displacements and stresses corresponding to a state of stress in an infinite, unbounded solid with no body forces acting in the medium, and such that all singularities lie within a sphere centered at the

¹⁾ U. S. Naval Ordnance Laboratory.

²⁾ University of Maryland.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 6.

Now $b'_i = b_i^0$ on $r = a$, and b_i^0 is a regular biharmonic function in $r > a$. Performing a Kelvin inversion (for biharmonic functions) we obtain the function $r b_i^0 (a^2/r)/a$ which is a regular biharmonic function in $r < a$ and which is equal to b'_i on $r = a$. Hence we may say that h_i is to be the solution of

$$\Delta h_i = 0 \quad \text{in } r < a, \quad h_i = \frac{r}{a} b_i^0 \left(\frac{a^2}{r} \right) \quad \text{on } r = a.$$

A simple application of our lemma yields (2.4).

We now introduce u'_i as the "regular part" of u_i in $r < a$ (i.e. $u'_i = u_i^0 - u_i$) and $x_j \tau'_{ij}$ as the corresponding stresses, related to u'_i by HOOKE's law. Then $b'_i = \alpha_1 x_j \tau'_{ij} + \alpha_2 u'_i$. Using HOOKE's law we find that

$$b'_i = \alpha_1 \left[\frac{\sigma}{1+\sigma} x_i \Theta' + \mu (x_j u'_{i,j} + (r u'_r)_{,i}) \right] + (\alpha_2 - \mu \alpha_1) u'_i, \quad (2.9)$$

and that

$$c b'_{j,i} = \frac{1}{1+\sigma} \Theta', \quad \text{where } \Theta' = \tau'_{ji}. \quad (2.10)$$

Hence

$$p_i = b'_i - c \sigma x_i b'_{i,j} = \alpha_1 \mu (x_j u'_{i,j} + (r u'_r)_{,i}) + (\alpha_2 - \mu \alpha_1) u'_i. \quad (2.11)$$

Now

$$x_j p_j = 2 \mu \alpha_1 r \left[K u'_r + r \frac{\partial}{\partial r} (u'_r) \right], \quad (2.12)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^K u'_r) = \frac{1}{2 \mu \alpha_1} r^{K-2} (x_j p_j). \quad (2.13)$$

Hence, (since $K \geq 1/2$), integrating (2.13) from 0 to r , we have

$$r u'_r = r^{1-K} \frac{1}{2 \mu \alpha_1} \int_0^r \varrho^{K-2} (x_j p_j) d\varrho. \quad (2.14)$$

Having solved for $r u'_r$ in terms of the p_i 's we now write (2.11) as

$$(2K - 1) u'_i + r \frac{\partial}{\partial r} u'_i = \frac{1}{\mu \alpha_1} p_i - (r u'_r)_{,i}. \quad (2.15)$$

Integrating (2.15) from 0 to r and using (2.14) we obtain (after a lengthy but elementary computation (2.1).

Corollary 1. (Fixed Boundary, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$).

Let u_i^0 represent a given state of stress whose singularities lie inside $r = a$. Then

$$u_i = u_i^0 - h_i + \frac{(r^2 - a^2)}{2(3 - 4\sigma)r} \int_0^r \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{(1-2\sigma)/(3-4\sigma)} h_{j,j,i} d\varrho, \quad (2.16)$$

where

$$h_i = \frac{r}{a} u_i^0 \left(\frac{a^2}{r} \right) - \frac{1}{4r} (r^2 - a^2) \int_0^r \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{1/2} \Delta \left[\frac{\varrho}{a} u_i^0 \left(\frac{a^2}{\varrho} \right) \right] d\varrho, \quad (2.17)$$

represents the state of stress in $r < a$ having precisely the same singularities as u_i^0 in $r < a$, and such that $u_i = 0$ on $r = a$. We assume that $\sigma < 3/2$ or $\sigma > 3/4$.

This corollary is just a limiting case of the theorem, however, it can be derived more simply in a manner analogous to that in the proof of the theorem. The details will be omitted. The cases of physical interest are included in the corollary, however, (2.16) may be extended to all values of $\sigma \neq (3n-4)/(2n-3)/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, by analytic continuation in (complex) σ .

Corollary 2. (Free Boundary, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$).

Let u_i^0 and $x_j \tau_{ij}^0$ represent a given state of stress all of whose singularities lie in $r < a$. If $\tau_{ij}^0 = O(r^{-2})$ for large r , then the formulae

$$u_i = u_i^0 + \frac{1}{2\mu} \int_0^r \left[\left(\frac{r}{\varrho} - 1 \right) (x_j p_j)_{,i} - 2 \frac{r}{\varrho} p_i \right] \varrho^{-1} d\varrho, \quad (2.18)$$

$$p_i = b'_i - \frac{\sigma}{1+\sigma} x_i b'_{i,j},$$

$$b'_i = h_i + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \int_0^r \frac{(a_1 - 1) (3 - 2a_2) \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{a_2} - (a_2 - 1) (3 - 2a_1) \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{a_1}}{a_2 - a_1} h_{j,j,i} \varrho^{-1} d\varrho, \quad (2.19)$$

$$a_i = \frac{3+2\sigma}{2} + (-1)^i \sqrt{\sigma^2 - \frac{3}{4}}.$$

$$h_i = \frac{r}{a} b_i^0 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{1}{4r} (r^2 - a^2) \int_0^r \left(\frac{\varrho}{r} \right)^{1/2} \Delta \left[\frac{\varrho}{a} b_i^0 \left(\frac{a^2}{\varrho} \right) \right] d\varrho, \quad b_i^0 \equiv x_j \tau_{ij}^0, \quad (2.20)$$

give the state of stress in $r < a$, having precisely the same singularities as u_i^0 in $r < a$, and such that $x_j \tau_{ij} = 0$ on $r = a$.

Proof. Under the additional hypothesis, $\tau_{ij}^0 = O(r^{-2})$ for large r , Theorem 1 is valid for $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. For $\sigma^2 < 3/4$, a_i is complex and $\text{Re}(a_i - 1) > 0$. In physically real cases in order to have equilibrium we require that $\tau_{ij}^0 = O(r^{-3})$ for large r . Hence, for all cases of physical interest Corollary 2 is valid. The only values which must be excluded are those for which $\sigma = -(n^2 + n + 1)/(2n + 1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. In all other cases the formulae (or continuations thereof) are valid. It should be noted that an exterior theorem could have been given as well. The formulae in this case can be obtained by changing the limits of the integrals from $(0, r)$ to (∞, r) .

REFERENCES

- [1] E. ALMANI, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$* , Annali di Matematica, Serie III, 2, (1899), p. 1-59.
- [2] J. BRAMBLE, *Continuation of Solutions of the Equations of Elasticity*, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 10 (1960).
- [3] W. D. COLLINS, *Some Stress Distributions in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow*, Proc. Lond. Math. Soc., 3, 9 (1959).
- [4] W. D. COLLINS, *Note on Displacements in an Infinite Elastic Solid Bounded Internally by a Rigid Spherical Inclusion*, J. Lond. Math. Soc., 34 (1959).
- [5] W. D. COLLINS, *On the Stress Distribution due to Force Nuclei in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow and in an Elastic Sphere*, Z. angew. Math. Phys., 11, 1 (1960).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Ausdrücke für das Verschiebungsfeld in einer elastischen Kugel angegeben, deren Oberfläche a) elastisch gelagert, b) eingespannt, c) frei ist. Die Verschiebungen werden durch diejenigen Verschiebungen und Spannungen ausgedrückt, die in einem unendlichen Körper unter derselben Verteilung von Singularitäten entstehen.

(Received: Mai 19, 1960.)

On the Wall Effect Correction of the Stokes Drag Formula for Axially Symmetric Bodies Moving Inside a Cylindrical Tube¹⁾

By I-DEE CHANG, Pasadena, California, U. S. A.²⁾

It is well known that the drag on a body moving in an incompressible viscous fluid may be determined from Stokes equations for small Reynolds numbers. When the flow field is infinite, formulae for computing the drag on bodies of various shapes are available [1, 2]³⁾. Recently, a class of solutions of Stokes equations for axially symmetric bodies moving in an infinite flow field were given by PAYNE and PELL [3]. Due to the nature of the Stokes equations, however, the effect of the wall of the containing vessel is generally not negligible [4]. This is clear from the fact that flow conditions specified at infinity often play vital roles to the solutions of Stokes equations.

The motion of a sphere in a vertical tube filled with stationary fluid was first studied by LADENBURG [5]. Assuming that the radius of the sphere is much

¹⁾ Research done under U.S. Air Force Office of Scientific Research Contract Nr. AF 49 (638) - 521.

²⁾ California Institute of Technology.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 13.

smaller than the radius of the tube, he obtained the following formula for the drag on the moving sphere:

$$D = 6 \pi \mu a U \left(1 + L \frac{a}{R} \right), \quad (1)$$

where a and R are, respectively, the radii of the sphere and the tube; μ is the viscosity of the fluid; U the velocity of the sphere; and L a constant approximately equal to 2.104 [2].

The above formula was obtained from an approximate solution of the Stokes equations. It gives the drag on the sphere to the order of approximation $O(a/R)$. Under the same conditions, we shall show that the drag on any axially symmetric body moving inside a tube of radius R is given by the formula:

$$D = D_0 \left(1 + \frac{\kappa D_0}{2 \pi^2 \mu U R} \right) + O\left(\frac{a^2}{R^2}\right), \quad (2)$$

where D_0 is the Stokes drag for the body moving in an infinite domain of fluids, and κ is a constant approximately equal to 2.203. The second term inside the bracket of (2) accounts for the wall effect correction; for the sphere, $D_0 = 6 \pi \mu U a$ and then (2) reduces to LADENBURG's formula (1).

Our problem consists in finding the drag force on an axially symmetric body moving with constant velocity U inside a tube filled with viscous fluid. The tube is assumed infinitely long, and the body is moving rectilinearly along the centerline of the tube so that an axially symmetric flow field, stationary at infinity, is maintained. We choose a cylindrical coordinate, taking the centerline of the tube as the z -axis and the radial distance from this axis as the radius r . The origin of the coordinate system is chosen to coincide, at a certain moment of time, with a point on the centerline of the body; the exact location of this point does not have to be specified. The flow velocity $\mathbf{q}(r, z)$ and the pressure $p(r, z)$ are given at this moment by the differential equations [5]:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{q} - \nabla p = 0 \quad (3a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad (3b)$$

and the boundary conditions

$$\mathbf{q} = -U \mathbf{i} \quad \text{at body}, \quad (4a)$$

$$\mathbf{q} = 0 \quad \text{for } r = R, \quad (4b)$$

and

$$\mathbf{q} \rightarrow 0 \quad \text{when } z \rightarrow \pm \infty, \quad (4c)$$

where \mathbf{i} is a unit vector pointing in the direction of the positive z -axis.

If the radius of the tube, R , is very large compared with the characteristic length a of the body, an approximate solution of (3) which gives the drag formula (2) may be obtained in the following manner. We consider the flow field in two regions: an *inner* region which is immediately adjacent to the body and an *outer* region which is far away from the body. The velocity \mathbf{q} and the pressure \bar{p} are treated in these two regions by the following successive approximations:

Inner solutions:

$$\mathbf{q} \sim \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1 + \dots, \quad (5a)$$

$$\bar{p} \sim \bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \dots \quad (5b)$$

Outer solutions:

$$\mathbf{q} \sim \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \dots, \quad (6a)$$

$$\bar{p} \sim \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 + \dots \quad (6b)$$

The first order *inner* solution \mathbf{h}_0 and \bar{p}_0 are obtained by letting $R \rightarrow \infty$. The differential equations and the boundary conditions for determining \mathbf{h}_0 and \bar{p}_0 are then

$$\mu \nabla^2 \mathbf{h}_0 - \nabla \bar{p}_0 = 0, \quad (7a)$$

$$\text{div } \mathbf{h}_0 = 0, \quad (7b)$$

and

$$\mathbf{h}_0 = -U \mathbf{i} \quad \text{at body}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{h}_0 \rightarrow 0 \quad \text{at infinity}, \quad (8b)$$

and the solution is simply that for a body moving in an infinite flow field, which is assumed already obtained. The drag force D_0 given by such a solution is also assumed known.

For later reference, the asymptotic expressions for the velocity \mathbf{h}_0 and the pressure field \bar{p}_0 , valid for large values of r and z , are given below (cf. equation (4.9) and (4.11) of reference [3]):

$$\mathbf{h}_0 \sim -\frac{D_0}{4\pi\mu} \left(\frac{\mathbf{i}}{\varrho} - \nabla \frac{z}{2\varrho} \right) + O\left(\frac{a^2}{\varrho^2}\right), \quad (9a)$$

$$\bar{p}_0 \sim -\frac{D_0 z}{4\pi\varrho^3} + O\left(\frac{a^3}{\varrho^3}\right), \quad (\varrho^2 = r^2 + z^2). \quad (9b)$$

The above expressions hold true for any shape of bodies with characteristic length a . The terms displayed satisfy the Stokes equations and give description to the velocity and pressure fields induced by applying a concentrated force of strength $-D_0 \mathbf{i}$ on the fluid at the origin. Such solutions are usually referred to as the fundamental solutions of the Stokes equations [4].

The *outer* solutions are valid approximations of the exact solutions in a region far from the body; for large tube radius R , this includes the region near the wall. In determining the outer solutions using the Stokes equations, the non-slip condition $\mathbf{q} = 0$ at the wall is used. Near the body the outer solutions are not expected to be valid, hence the boundary condition at the body may not be used. In the place of the later, we introduce the *matching conditions* existing between the *inner* and the *outer* solutions. Loosely speaking, this condition states that the leading terms of the outer solutions when expanded into a series for small values of ϱ must agree with the leading terms of the inner solutions when expanded into a series for large values of ϱ . When such *matching* is possible, an additional condition is available for the determination of the solutions.

The first order *outer* solutions \mathbf{g}_0 and \tilde{p}_0 are thus solutions of the Stokes equations which satisfy the boundary condition $\mathbf{g}_0 = 0$ at the wall and which reduce to equation (9) for small values of ϱ . By direct calculation one can show that the proper solutions for \mathbf{g}_0 and \tilde{p}_0 are given by the equations

$$\mu \nabla^2 \mathbf{g}_0 - \nabla \tilde{p}_0 = D_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{i}, \quad (10a)$$

$$\text{div } \mathbf{g}_0 = 0, \quad (10b)$$

and the boundary conditions

$$\mathbf{g}_0 = 0 \quad \text{for } r = R, \quad (11a)$$

$$\mathbf{g}_0 \rightarrow 0 \quad \text{when } z \rightarrow \pm \infty, \quad (11b)$$

where $\delta(\mathbf{r})$ is the δ -function which is zero when $\mathbf{r} \neq 0$ and is ∞ when $\mathbf{r} = 0$ and its integral over any volume containing the origin is equal to unity. From equation (10a) one sees that the boundary condition at the body (4a) is expressed by introducing a forcing term $D_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{i}$ in the momentum equation. This is equivalent to replacing the body by its retarding force on the fluid.

The solution of \mathbf{g}_0 may be divided into two parts: $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_0^{(1)} + \mathbf{g}_0^{(2)}$. The first part, $\mathbf{g}_0^{(1)}$, consists of terms which are singular at $\mathbf{r} = 0$. These terms arise due to the singular forcing function $D_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{i}$. We shall show by explicit calculation that this part is identical to the asymptotic expressions of \mathbf{h}_0 and \tilde{p}_0 displayed in (9). The second part, $\mathbf{g}_0^{(2)}$, contains terms which are regular at $\mathbf{r} = 0$ and arises due to the non-slip boundary condition $\mathbf{g}_0 = 0$ at the wall. The second flow field is therefore induced by the *reflection* of the wall. Since the flow is axially symmetric, the induced velocity $\mathbf{g}_0^{(2)}$ has only the z -component at the point $\mathbf{r} = 0$. For small values of ϱ , one finds (cf. eq. (31) below)

$$\mathbf{g}_0^{(2)} = u' \mathbf{i} + O\left(\frac{a^2}{R^2}\right). \quad (12)$$

Next, we consider the second order inner solutions \mathbf{h}_1 and \bar{p}_1 . The requirements for \mathbf{h}_1 and \bar{p}_1 are then that they should match with $\mathbf{g}_0^{(2)}$ which is the unmatched part between the first order *inner* and *outer* solutions. Thus

$$\mu \nabla^2 \mathbf{h}_1 - \nabla \bar{p}_1 = 0, \quad (13a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h}_1 = 0, \quad (13b)$$

with the boundary conditions

$$\mathbf{h}_1 = 0 \quad \text{at body}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{h}_1 \rightarrow u' \mathbf{i} \quad \text{at infinity}. \quad (14b)$$

The second condition, (14b), is the *matching condition* mentioned above. By considering equations (13) and (14) in conjunction with equation (7) and (8), one sees easily that the sum $\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1$ is the solution of the Stokes equations which correspond to the body moving with a relative velocity $U + u'$. The effect of the wall, to the order $O(a/R)$, is therefore an apparent increase of the velocity of the body in the ratio $1:(1 + u'/U)$. There is an equal amount of increase in the drag force if the momentum integral of the velocity field is computed. The drag force on the body in the presence of the wall is then equal to

$$D = D_0 \left(1 + \frac{u'}{U}\right) + O\left(\frac{a^2}{R^2}\right). \quad (15)$$

This basic formula to be used below was also used by LADENBURG in obtaining (1) based on a different argument. The above formulation follows essentially the singular perturbation procedure developed in [6]. In a formal application of the theory one should first introduce the small parameter $\varepsilon = a/R$ and then consider the various limits of the flow quantities \mathbf{q} and p corresponding to different orders of the space variables r and z with respect to ε . This systematic procedure leads to an *inner* and an *outer* expansion similar, respectively, to (5) and (6). Such formal development, while leading to justification to many arguments given above, is too lengthy to be used in this short paper.

Now, let us find the value of u' by considering (10) and (11). We put

$$\mathbf{g}_0 = \frac{D_0}{\mu} \left[\nabla^2 \Phi \mathbf{i} - \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \quad (16a)$$

$$\tilde{p}_0 = -D_0 \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (16b)$$

By inserting these expressions into equations (10), one easily verifies that (10b) is identically satisfied and (10a) becomes

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \delta(r). \quad (17)$$

Furthermore, (11a) and (11b) lead to the following conditions for $\Phi(r, z)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{for } r = R, \quad (18a)$$

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{when } z \rightarrow \pm \infty. \quad (18b)$$

We define the Fourier transform of a function $F(r, z)$ by the pair

$$F(r, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} F(r, z) dz \quad (19a)$$

and

$$F(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} \bar{F}(r, \lambda) d\lambda, \quad (19b)$$

and denote $\nabla^2 \Phi$ by the function $\varphi(r, z)$. After applying the transform to equation (17) there follows

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \lambda^2 \bar{\varphi} = \delta(r). \quad (20)$$

Here $\delta(r)$ is a δ -function defined by

$$\delta(r) = \delta(r) \delta(x). \quad (21)$$

The solution of equation (20) is

$$\bar{\varphi}(r, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r) + \frac{A}{2\pi} I_0(\lambda r). \quad (22)$$

The equation for $\bar{\Phi}(r, \lambda)$ is then

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}}{dr} - \lambda^2 \bar{\Phi} = \bar{\varphi}(\lambda r), \quad (23)$$

which gives the result

$$\lambda^2 \bar{\Phi}(r, \lambda) = \frac{\lambda r}{4\pi} K_1(\lambda r) + \frac{A}{2\pi} \lambda r I_1(\lambda r) + \frac{B}{2\pi} I_0(\lambda r). \quad (24)$$

In (24), A and B are the constants of integration to be determined from boundary conditions (18) and I_0 , I_1 , K_0 and K_1 are the modified Bessel functions. By direct calculation one finds

$$A(\lambda R) = \frac{I_1(\lambda R) K_0(\lambda R) - \frac{\lambda R}{2} [I_0(\lambda R) K_0(\lambda R) + I_1(\lambda R) K_1(\lambda R)]}{I_0(\lambda R) I_1(\lambda R) + \frac{\lambda R}{2} [I_1^2(\lambda R) - I_0^2(\lambda R)]} \quad (25a)$$

and

$$B(\lambda R) = \frac{\frac{\lambda R}{4}}{I_0(\lambda R) I_1(\lambda R) + \frac{\lambda R}{2} [I_1^2(\lambda R) - I_0^2(\lambda R)]}. \quad (25b)$$

The z -component of \mathbf{g}_0 , $u(r, z)$, is given by the expression

$$u(r, z) = \frac{D_0}{\mu} \left[\varphi(r, z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(r, z) \right]. \quad (26)$$

The Fourier transform of $u(r, z)$ is

$$\bar{u}(r, \lambda) = \frac{D_0}{\mu} [\bar{\varphi}(r, \lambda) + \lambda^2 \bar{\Phi}(r, \lambda)] \quad (27)$$

$$= \bar{u}^{(1)}(r, \lambda) + \bar{u}^{(2)}(r, \lambda), \quad (28)$$

where

$$\bar{u}^{(1)}(r, \lambda) = -\frac{D_0}{2\pi\mu} \left[K_0(\lambda r) - \frac{\lambda r}{2} K_1(\lambda r) \right] \quad (29)$$

and

$$\bar{u}^{(2)}(r, \lambda) = \frac{D_0}{2\pi\mu} [A(\lambda r) (I_0(\lambda r) + \lambda r I_1(\lambda r)) + B(\lambda R) I_0(\lambda r)]. \quad (30)$$

These two parts of $\bar{u}(r, \lambda)$ correspond, respectively, to the z -component of $\mathbf{g}_0^{(1)}$ and $\mathbf{g}_0^{(2)}$. The inverse of $\bar{u}^{(2)}(r, \lambda)$ is obtained by using (19b):

$$u^{(2)}(r, z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma(z/R)} \bar{u}\left(\frac{r}{R}\sigma, \sigma\right) d\sigma; \quad \sigma = \lambda R, \quad (31a)$$

and $u^{(2)}(r, z)$ is regular at the point $\mathbf{r} = 0$:

$$u^{(2)}(r, z) = u' + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (31b)$$

where u' is the value of $u(r, z)$ at the point $\mathbf{r} = 0$. One finds

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{D_0}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\varphi}(0, \lambda) + \lambda^2 \bar{\Phi}(0, \lambda)] d\lambda \\ &= \frac{D_0}{4\pi^2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda R) + B(\lambda R)] d\lambda = \frac{D_0}{2\pi^2\mu R} \int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{\kappa D_0}{2\pi^2\mu R}, \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

where

$$\kappa = \int_0^\infty H(\sigma) d\sigma = \int_0^\infty \frac{I_1(\sigma) K_0(\sigma) - \frac{\sigma}{2} [I_0(\sigma) K_0(\sigma) + I_1(\sigma) K_1(\sigma)] + \frac{\sigma}{4}}{I_0(\sigma) I_1(\sigma) + \frac{\sigma}{2} [I_1^2(\sigma) - I_0^2(\sigma)]} d\sigma \quad (32b)$$

$$\cong 2.203.$$

So, finally,

$$D = D_0 \left(1 + \frac{u'}{U}\right) = D_0 \left(1 + \frac{\kappa D_0}{2 \pi^2 \mu R U}\right). \quad (33)$$

In Table I we list several cases where the value D_0 is given in reference [3].

Table 1

Body	Drag (Infinite Domain)	Drag (Inside Tube of Radius R)
(1) Hemispherical Cup	$17.525 \mu a U$	$17.525 \mu a U(1 + 1.956 a/R)$
(2) Flat disc of radius a	$16 \mu a U$	$16 \mu a U(1 + 1.786 a/R)$
(3) Sphere of radius a	$6 \pi \mu a U$	$6 \pi \mu a U(1 + 2.104 a/R)$
(4) Prolate spheroid	$8 \pi \alpha \mu a U$	$8 \pi \alpha \mu a U(1 + 2.805 \alpha a/R)$
(5) Oblate spheroid	$8 \pi \beta \mu a U$	$8 \pi \beta \mu a U(1 + 2.805 \beta a/R)$

In the above, a is the radius of the frontal area circle of the body for cases (1)–(3). The cross section of the spheroids, (4), (5), intercepted by the $r - z$ plane, is an ellipse. For the prolate spheroids the foci are at $(\pm a, 0)$ and α is equal to the value

$$\alpha = \left[\frac{1}{2} (s^2 + 1) \log \frac{s + 1}{s - 1} - s \right]^{-1}. \quad (34)$$

For the oblate spheroids the foci are at $(0, \pm a)$ and β is equal to the value

$$\beta = [(1 - s^2) \cot^{-1} s + s]^{-1}. \quad (35)$$

In (34) and (35) s is equal to the ratio of the semi-axis along the z -axis to the focal length a , of the ellipse.

REFERENCES

- [1] C. W. OSEEN, *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927).
- [2] H. L. DRYDEN, F. D. MURNAGHAM, and H. BATEMAN, *Hydrodynamics* (Dover Publications, New York 1956).
- [3] L. E. PAYNE and W. H. PELL, *J. Fluid Mech.* 7, 529–549 (1960).
- [4] P. A. LAGERSTROM, *Theory of Laminar Flows, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, IV*, Pt. B, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (to be published).
- [5] R. LADENBURG, *Ann. Phys.* 23, 447–458 (1907).
- [6] P. A. LAGERSTROM and J. D. COLE, *J. rat. Mech. Analysis*, 4, 817–882 (1955).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der Einfluss der Wand auf die Bewegung eines rotationssymmetrischen Körpers längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres betrachtet. Der Widerstand des Körpers wird unter der Voraussetzung berechnet, dass die Dimensionen des Körpers gegenüber dem Radius des Rohres klein sind. Wir finden für den Widerstand D eines Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit U längs der Achse einer zylindrischen Röhre mit dem inneren Radius R bewegt,

$$D = D_0 \left[1 + \frac{\kappa D_0}{2 \pi^2 \mu U R} \right],$$

wo D_0 der Widerstand des Körpers in einer sonst den ganzen Raum füllenden Flüssigkeit, κ eine Konstante etwa gleich 2.203, und μ die Viskositätskonstante ist.

(Received: June 10, 1960.)

Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten

Von KLAUS KIRCHGÄSSNER¹⁾, Freiburg i. Br., Deutschland

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der zuerst von TAYLOR [1]²⁾ untersuchten Instabilität der laminaren, inkompressiblen Strömung zwischen zwei rotierenden coaxialen Zylindern. Die Störungen, die von einer gewissen Rotationsgeschwindigkeit des inneren Zylinders an auftreten können, bilden sich bekanntlich in Form eines in Richtung der Zylindererzeugenden periodischen Wirbelmusters aus.

Um die numerischen Auswertungen mit erträglichem Aufwand durchführen zu können, musste TAYLOR, neben anderen Annahmen wie der Kleinheit der betrachteten Störungen, verlangen, dass die Spaltbreite (Differenz der Zylinderradien) klein sei gegenüber den Krümmungsradien der Zylinder.

Die Erweiterung dieser Theorie auf den Fall beliebiger Spaltbreite gelang erstmals CHANDRASEKHAR [2] in neuester Zeit. Die von ihm angewandte Methode zur Lösung des Problems beruht auf einer auch von TAYLOR angesetzten Reihenentwicklung der Störungsamplituden nach Besselfunktionen.

In der vorliegenden Arbeit wird zur Lösung desselben Problems ein anderer Weg beschritten, der wesentlich auf der von GÖRTLER [3] und HÄMMERLIN [4]

¹⁾ Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Freiburg und dem Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der DVL an der Universität Freiburg. Diese Untersuchung wurde vom Wirtschaftsministerium des Landes Baden/Württemberg gefördert.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 29.

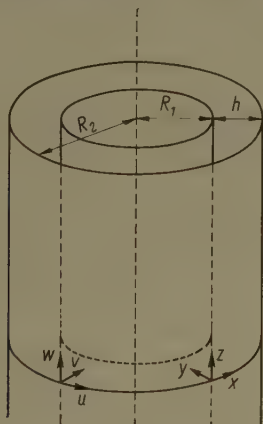
benutzten Methode aufgebaut ist. Diese Methode hat gegenüber der von CHANDRASEKHAR benutzten den Vorteil, dass der numerisch umfangreichste Teil, nämlich die Vertafelung der Greenschen Funktionen, von der speziellen Gestalt der Grundströmung unabhängig ist. Die Grundströmung wird erst im letzten Abschnitt der numerischen Auswertungen benötigt.

Wie alle auf der Grundlage kleiner Störungen behandelten Stabilitätsprobleme führt auch die vorliegende Untersuchung auf ein Eigenwertproblem, bei dem ausschliesslich der kleinste positive Eigenwert physikalische Bedeutung besitzt. Die Existenz dieses Eigenwertes wird in Strenge nachgewiesen.

Unsere Ergebnisse konnten in einem Fall mit experimentellen Resultaten von DONELLY [5] verglichen werden, wobei sich gute Übereinstimmung ergab.

1. Das Eigenwertproblem

Wir untersuchen die inkompressible zähe Strömung zwischen zwei unendlich langen, um ihre gemeinsame Achse rotierenden Zylindern – ihre Krümmungsradien bezeichnen wir mit R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) –, wobei wir zweckmässigerweise das in Figur 1 gezeichnete Koordinatensystem verwenden; u, v, w sind die Geschwindigkeitskomponenten in x, y, z -Richtung.



Figur 1

Das benutzte Koordinatensystem.

Da wir bei den in einer Reihe von Arbeiten wiedergegebenen Ableitungen der Grundgleichungen nicht verweilen wollen, sondern nur die benutzten Symbole und das zu diskutierende Eigenwertproblem anzugeben beabsichtigen, gehen wir von vornherein zu dimensionslosen Grössen über. Wir denken uns alle von jetzt an auftretenden variablen Längen mit der Spaltbreite $h = R_2 - R_1$, alle variablen Geschwindigkeiten mit der Rotationsgeschwindigkeit des inneren

Zylinders $R_1 \omega_1$ (ω_1 = Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders, ω_2 = Winkelgeschwindigkeit des äusseren Zylinders) und den Druck mit $\varrho R_1^2 \omega_1^2$ dimensionslos gemacht. Dabei steht ϱ für die Dichte. Ferner setzen wir: $\bar{R}_i = R_i/h$, ($i = 1, 2$). Als weitere dimensionslose Grösse wird in die Gleichungen die Reynoldszahl:

$$Re = \frac{R_1 \omega_1 h}{\nu}$$

eingehen. Dabei steht ν für die kinematische Zähigkeit.

Die stationäre Grundströmung hat dann, in dimensionsloser Form geschrieben, die Gestalt (vgl. etwa SCHLICHTING [6]):

$$u_0(y) = A (\bar{R}_2 - y) + \frac{B}{(\bar{R}_2 - y)}, \quad (1.1)$$

mit

$$A = \frac{\bar{R}_1^2 - (\omega_2/\omega_1) \bar{R}_2^2}{\bar{R}_1 (1 - 2 \bar{R}_2)}; \quad B = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2^2 (1 - \omega_2/\omega_1)}{2 \bar{R}_2 - 1}.$$

Ihr entspricht eine Druckverteilung $p_0(y)$, für die sich aus der zweiten Navier-Stokesschen Gleichung der folgende Ausdruck ergibt:

$$p_0(y) = - \int \frac{u_0''(y)}{\bar{R}_2 - y} dy. \quad (1.2)$$

Der Grundströmung werden nun in üblicher Weise dreidimensionale Störungen in Gestalt von in z -Richtung periodischen Wirbelpaaren überlagert:

$$\left. \begin{aligned} u(y, z, t) &= u_0(y) + u_1(y) \cos \sigma z \cdot e^{\gamma t}, \\ v(y, z, t) &= v_1(y) \cos \sigma z \cdot e^{\gamma t}, \\ w(y, z, t) &= w_1(y) \sin \sigma z \cdot e^{\gamma t}, \\ p(y, z, t) &= p_0(y) + p_1(y) \cos \sigma z \cdot e^{\gamma t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Hierbei gibt σ die Zahl der Wirbelpaare in einem Intervall der Länge $2\pi h$ und γ den Anfachungsgrad der Störungen an.

Wir beschränken uns im folgenden stets auf neutrale Störungen ($\gamma = 0$) und bezeichnen für jeden Parameterwert σ die kleinste Reynoldszahl, für die neutrale Störungen auftreten können, mit $Re_0(\sigma)$. Dann ergibt sich, wie physikalisch zu erwarten, dass für $Re < Re_0(\sigma)$ alle Störungen mit der Wirbelzahl σ gedämpft ($\gamma < 0$) und für $Re > Re_0(\sigma)$ angefacht ($\gamma > 0$) sind. Die kleinste aus der Gesamtheit aller Zahlen $Re_0(\sigma)$ heisse die *kritische* Reynoldszahl Re_{kr} .

Geht man mit dem Ansatz (1.3) in die Navier-Stokesschen Gleichungen ein, und linearisiert man bezüglich der Störungsamplituden, so ergibt sich nach

einigen Umformungen das folgende Eigenwertproblem (vgl. etwa WITTING [7]):

$$L[u_1(y)] = -2 A v_1(y) ,$$

$$L^2[v_1(y)] = 2 \sigma^2 \mu \frac{u_0(y)}{\bar{R}_2 - y} u_1(y) , \quad (1.4)$$

$$u_1(0) = u_1(1) = 0; \quad v_1(0) = v_1(1) = 0; \quad \frac{dv_1(0)}{dy} = \frac{dv_1(1)}{dy} = 0 ,$$

mit $\mu = Re^2$ und

$$L \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{\bar{R}_2 - y} \frac{d}{dy} - \left\{ \sigma^2 + \frac{1}{(\bar{R}_2 - y)^2} \right\} .$$

Aus physikalischen Gründen interessiert in diesem Zusammenhang lediglich der kleinste positive Eigenwert $\mu_0(\sigma) = Re_0^2(\sigma)$, dessen Existenz wir mit Hilfe der im folgenden Paragraphen bewiesenen Hilfssätze nachweisen werden.

2. Einige Hilfssätze zur Behandlung des Eigenwertproblems

Bei der Bestimmung des kleinsten positiven Eigenwertes von (1.4) greifen wir auf das von GÖRTLER [3] und HÄMMERLIN [4] verwendete Verfahren zurück, führen also (1.4) mittels der Greenschen Funktionen in äquivalente Integralgleichungen über und ermitteln den gesuchten Eigenwert iterativ. Der Existenznachweis für den Eigenwert wird wie in [4] mit Hilfe eines Satzes von JENTZSCH [8] geführt, der mit einigen Voraussetzungen über den Kern, und damit in diesem Fall über die Greenschen Funktionen verknüpft ist. Diese Eigenschaften sollen im Hilfssatz 1 dieses Paragraphen bewiesen werden. Die Aussage des Hilfssatzes 2 benötigen wir später zur Untersuchung des Eigenwertverhaltens für den nur mathematisch interessierenden Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$, das heisst unendlich grosser Wirbelabmessungen.

Seien G und H die zu untersuchenden Greenschen Funktionen. Sie genügen überall im Quadrat $Q = \{0 < y < 1; 0 < \hat{y} < 1\}$ mit Ausnahme der Strecke $y = \hat{y}$ den Differentialgleichungen:

$$L[G(y, \hat{y})] = 0; \quad L^2[H(y, \hat{y})] = 0 , \quad (2.1)$$

und den homogenen Randbedingungen:

$$G(0, \hat{y}) = G(1, \hat{y}) = 0; \quad H(0, \hat{y}) = H(1, \hat{y}) = 0; \quad \frac{\partial H(0, \hat{y})}{dy} = \frac{\partial H(1, \hat{y})}{dy} = 0 . \quad (2.2)$$

Die Funktion G ist überall in Q stetig. Ihre erste Ableitung besitzt für $y = \hat{y}$ eine Unstetigkeit. Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial G(\hat{y} - \varepsilon, \hat{y})}{\partial y} - \frac{\partial G(\hat{y} + \varepsilon, \hat{y})}{\partial y} \right\} = 1 . \quad (2.3)$$

Die Funktion H ist in Q zweimal stetig differenzierbar. Für ihre dritte Ableitung gilt an der Stelle $y = \hat{y}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial^3 H(\hat{y} - \varepsilon, \hat{y})}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 H(\hat{y} + \varepsilon, \hat{y})}{\partial y^3} \right\} = 1. \quad (2.4)$$

Wir beweisen nun

Hilfssatz 1: Für die Greenschen Funktionen G und H , mit den in den Gleichungen (2.1) bis (2.4) festgelegten Eigenschaften, gelten die folgenden Ungleichungen³⁾:

1. $G(y, \hat{y}) > 0$ in Q ,
2. $\frac{\partial G(0, \hat{y})}{\partial y} > 0$; $\frac{\partial G(1, \hat{y})}{\partial y} < 0$; $\hat{y} \in \hat{I} = \{0 < \hat{y} < 1\}$,
3. $H(y, \hat{y}) < 0$ in Q ,
4. $\frac{\partial^2 H(0, \hat{y})}{\partial y^2} < 0$; $\frac{\partial^2 H(1, \hat{y})}{\partial y^2} < 0$, $\hat{y} \in \hat{I}$.

Beweis: 1. Die Funktion G kann in Q , ausgenommen auf der Strecke $y = \hat{y}$, weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen, da sonst die Ungleichungen

$$L[G] < 0 \text{ bzw. } L[G] > 0$$

für mindestens einen Punkt in Q gelten. G ist daher in jedem der Teilbereiche $0 \leq y \leq \hat{y}$; $\hat{y} \leq y \leq 1$ monoton. Wäre nun G im ersten der beiden Teilbereiche negativ, so folgte aus der Monotonie und aus $G(0, \hat{y}) = 0$:

$$\frac{\partial G(y, \hat{y})}{\partial y} \leq 0 \quad \text{für } 0 < y < \hat{y},$$

und wegen der Stetigkeit von G und $G(1, \hat{y}) = 0$:

$$\frac{\partial G(y, \hat{y})}{\partial y} \geq 0 \quad \text{für } \hat{y} < y < 1.$$

Diese beiden Ungleichungen stehen aber im Widerspruch zur Beziehung (2.3), woraus sich also $G \geq 0$ in Q ergibt.

2. Längs der Strecken $y = 0$ und $y = 1$ gilt daher sicher für die einseitigen Ableitungen:

$$\frac{\partial G(0, \hat{y})}{\partial y} \geq 0; \quad \frac{\partial G(1, \hat{y})}{\partial y} \leq 0; \quad \hat{y} \in \hat{I}.$$

³⁾ Wie der Beweis zeigt, gilt die Behauptung dieses Satzes auch für den Fall, dass der Operator L die allgemeine Gestalt

$$\bar{L} \equiv a(y) \frac{d^2}{dy^2} + b(y) \frac{d}{dy} + c(y)$$

besitzt, wenn nur a , b und c stetig im betrachteten Bereich und $a > 0$, $c < 0$ ist.

Angenommen nun, es gebe ein $\hat{y}_0 \in \hat{I}$ so, dass in einer der beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen steht, dann folgt aus (2.1) sowie aus der Stetigkeit und Monotonie von G :

$$G(y, \hat{y}_0) \equiv 0, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

wiederum im Widerspruch zu (2.3). Hieraus ergeben sich aber sofort die Ungleichungen der Behauptung 2, und damit $G > 0$ im Innern von Q .

3. Setzen wir vorübergehend:

$$L[H] = K, \quad (2.5)$$

so befriedigt K die Differentialgleichung

$$L[K] = 0; \quad (2.6)$$

a) K ist stetig, und $\partial K / \partial y$ besitzt längs der Strecke $y = \hat{y}$ eine Unstetigkeit der Form (2.3). K kann in jedem der Gebiete $0 < y < \hat{y}$; $\hat{y} < y < 1$, $\hat{y} \in \hat{I}$ nach unseren Überlegungen über G weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen und daher in $I = \{0 < y < 1\}$ höchstens 2 Nullstellen besitzen. H selbst verschwindet in keinem Teilintervall von I identisch, was sich leicht mit Hilfe der oben erwähnten Eigenschaften von K und Gleichung (2.4) beweisen lässt.

b) Besitzt H für ein $\hat{y} = \hat{y}_0$ in I n Nullstellen, wobei eine k -fache Nullstelle nur 1mal gezählt wird, so hat K in I mindestens $n + 2$ Nullstellen. Um dies einzusehen, hat man nur zu beachten, dass H in jedem der durch die Nullstellen begrenzten $n + 1$ Teilintervalle von I mindestens ein Extremum annimmt. Zwischen je zwei dieser Extrema liegt sicher eine Nullstelle von K , wie man sich leicht überlegt. Ferner wechselt K zwischen den Randpunkten $y = 0$ und $y = 1$ und den ihnen benachbarten Extremstellen nochmals das Vorzeichen ($H \not\equiv 0$ in der Umgebung dieser Punkte).

Hieraus folgt aber sofort das Behauptete.

c) Da aber nach (a) K in I nicht mehr als zwei Nullstellen besitzen kann, gilt $n = 0$.

Nimmt man nun an, H sei für ein $\hat{y} = \hat{y}_0$ im ganzen Intervall I positiv, so existiert mindestens ein Punkt (y_0, \hat{y}_0) , wo H ein positives Maximum annimmt. K ist dann an dieser Stelle negativ, während es auf Grund der Randbedingungen (2.2) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Randpunkte $y = 0$ und $y = 1$ positiv ist ($H \not\equiv 0$ in der Umgebung dieser Punkte). Hieraus und mit Hilfe der Beziehung (2.3) schliesst man, dass dies nur dann der Fall sein kann, wenn K für ein $y = y_1 \neq \hat{y}_0$ ein negatives Minimum besitzt, was im Widerspruch zu den unter (a) angeführten Eigenschaften von K steht.

Damit ist gezeigt, dass für H in Q die Ungleichung:

$$H(y, \hat{y}) < 0$$

gilt.

4. Zum Beweis dieses letzten Teiles der Behauptung nehmen wir an, es existiere ein $\hat{y}_0 \in \hat{I}$, für welches etwa

$$\frac{\partial^2 H(0, \hat{y}_0)}{\partial y^2} = 0$$

ist. Dann gilt aber $\partial K / \partial y < 0$ in diesem Punkt, wegen $H \not\equiv 0$. Dies ist aber wegen der auch für K geltenden Beziehung (2.3) und wegen der unter (a) aufgeführten Eigenschaften von K unmöglich.

Damit ist Hilfssatz 1 vollständig bewiesen.

Wir bezeichnen mit L_0 den Operator, der aus L hervorgeht, wenn $\sigma = 0$ gesetzt wird:

$$L_0 \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{R_2 - y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{(R_2 - y)^2}. \quad (2.7)$$

Die Greenschen Funktionen der Operatoren L_0 und L_0^2 , die den Randbedingungen (2.2) genügen, nennen wir G_0 und H_0 ; dann gilt:

Hilfssatz 2: Lässt man σ gegen Null konvergieren, so gilt gleichmässig im Bereich Q :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |G(y, \hat{y}) - G_0(y, \hat{y})| = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} |H(y, \hat{y}) - H_0(y, \hat{y})| = 0.$$

Beweis: Die Funktion $D_1 = G - G_0$ ist in Q zweimal stetig differenzierbar und befriedigt die Differentialgleichung:

$$L[D_1(y, \hat{y})] = \sigma^2 G_0(y, \hat{y}).$$

Führt man diese Beziehung durch die Greensche Funktion G in Integralform über, so ergibt sich:

$$D_1(y, \hat{y}) = -\sigma^2 \int_0^1 G(y, \bar{y}) G_0(\bar{y}, \hat{y}) d\bar{y}.$$

Bezeichnet G_{0M} das Maximum von G_0 im Bereich Q , so folgt, da G nach Hilfssatz 1 in Q positiv ist:

$$|D_1(y, \hat{y})| < \sigma^2 G_{0M} d_1(y), \quad (2.8)$$

mit

$$d_1(y) = \int_0^1 G(y, \bar{y}) d\bar{y}.$$

\hat{d}_1 genügt der Differentialgleichung:

$$L[d_1(y)] = -1, \quad (2.9)$$

was man sehr leicht verifiziert. Hieraus gewinnt man aber die Abschätzung:

$$d_1(y) < \hat{d}_1 = \frac{1}{\sigma^2 + 1/\bar{R}_g^2}. \quad (2.10)$$

Es gilt nämlich:

$$L[\hat{d}_1] \leq -1 \text{ in } Q.$$

Da $d_1(y)$ für $y = 0$ und $y = 1$ verschwindet, müsste, falls $d_1 > \hat{d}_1$ an einer Stelle gilt, mindestens ein y_0 existieren, wo d_1 ein positives Maximum annimmt und $d_1(y_0) > \hat{d}_1$ ist. Dort bestünde dann aber die Ungleichung:

$$L[d_1(y)] < L[\hat{d}_1] \leq -1,$$

in Widerspruch zu Gleichung (2.9).

Aus (2.8) und (2.10) folgt nun:

$$|D_1(y, \hat{y})| < \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 1/\bar{R}_g^2} G_{0M}.$$

Da G_{0M} von σ nicht abhängt, folgt hieraus:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |D_1(y, \hat{y})| = \lim_{\sigma \rightarrow 0} |G(y, \hat{y}) - G_0(y, \hat{y})| = 0,$$

gleichmässig in Q .

Den zweiten Teil unserer Behauptung beweisen wir ganz entsprechend. Wir setzen: $D_2 = H - H_0$ und erhalten für D_2 die Differentialgleichung:

$$L^2[D_2] = 2\sigma^2 L_0[H_0] - \sigma^4 H_0. \quad (2.11)$$

Da H_0 in Q und bei einseitiger Annäherung an den Rand von Q stetig differenzierbar ist, können wir $L_0[H_0]$ und H_0 in Q nach oben abschätzen:

$$|L_0[H_0(y, \hat{y})]| < C, \quad |H_0(y, \hat{y})| < H_{0M}.$$

(2.11) wird wiederum mit Hilfe von H in Integralform überführt und $|D_2|$ nach oben abgeschätzt:

$$|D_2(y, \hat{y})| < d_2(y) \{2\sigma^2 C + \sigma^4 H_{0M}\},$$

mit

$$d_2(y) = - \int_0^1 H(y, \bar{y}) d\bar{y}.$$

d_2 erfüllt die Differentialgleichung:

$$L^2[d_2(y)] = 1.$$

Setzt man

$$L[d_2(y)] = \delta_2(y),$$

so gilt

$$L[\delta_2(y)] = 1,$$

und es ist δ_2 für $y = 0$ und $y = 1$ positiv, wie aus der Aussage 4 des Hilfssatzes 1 folgt. Wendet man die Überlegungen, die wir oben bei der Abschätzung von d_1 angestellt haben, auf δ_2 und d_2 an, so ergibt sich:

$$d_2(y) < \frac{1}{(\sigma^2 + 1/\bar{R}_2^2) \{\sigma^2 + 1/(\bar{R}_2 - 1)^2\}},$$

und hieraus für D_2 :

$$|D_2(y, \hat{y})| < \frac{2\sigma^2 C + \sigma^4 H_{0M}}{(\sigma^2 + 1/\bar{R}_2^2) \{\sigma^2 + 1/(\bar{R}_2 - 1)^2\}}.$$

Lässt man σ gegen Null gehen, so folgt gleichmässig in Q :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |D_2(y, \hat{y})| = \lim_{\sigma \rightarrow 0} |H(y, \hat{y}) - H_0(y, \hat{y})| = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

3. Berechnung der Greenschen Funktionen und Existenzbeweis für den gesuchten Eigenwert

Um das in 2 angekündigte Verfahren zur Bestimmung des kleinsten Eigenwerts anwenden zu können, müssen wir die Greenschen Funktionen G und H kennen. Zu diesem Zweck benötigen wir zunächst ein Fundamentalsystem von Lösungen der Operatoren L und L^2 . Für L bieten sich hierfür die modifizierten Besselfunktionen 1. Ordnung I_1 und K_1 an, deren Wronski-Determinante A_1 den Wert

$$A_1(r) = -\frac{1}{r} \quad \text{mit} \quad r = \sigma(\bar{R}_2 - y)$$

besitzt. Hieraus lassen sich aber ohne Schwierigkeit vier linear unabhängige Lösungen von L^2 bestimmen. Sie lauten:

$$\varphi_1(r) = I_1(r),$$

$$\varphi_2(r) = K_1(r),$$

$$\varphi_3(r) = A_1(r) I_1(r) - A_2(r) K_1(r),$$

$$\varphi_4(r) = A_3(r) I_1(r) - A_1(r) K_1(r),$$

mit den Abkürzungen

$$A_1(r) = \int_{r_1}^r \varrho \, I_1(\varrho) \, K_1(\varrho) \, d\varrho,$$

$$A_2(r) = \int_{r_1}^r \varrho [I_1(\varrho)]^2 \, d\varrho,$$

$$A_3(r) = \int_{r_1}^r \varrho [K_1(\varrho)]^2 \, d\varrho,$$

wobei wir für r_1 den Wert $r_1 = \sigma (\bar{R}_2 - 1)$ gewählt haben. Für die Wronski-Determinante Δ der vier Funktionen $\varphi_i(r)$ gilt:

$$\Delta_2(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Die Greenschen Funktionen G und H haben dann die folgende Gestalt:

$$G(r, \hat{r}) = \frac{\hat{r}}{N_1} \left\{ \begin{array}{l} [I_1(r_2) K_1(\hat{r}) - K_1(r_2) I_1(\hat{r})] [I_1(r_1) K_1(r) - K_1(r_1) I_1(r)] \\ \quad \text{für } r \leq \hat{r}; \\ [I_1(r_2) K_1(r) - K_1(r_2) I_1(r)] [I_1(r_1) K_1(\hat{r}) - K_1(r_1) I_1(\hat{r})] \\ \quad \text{für } r \geq \hat{r}; \end{array} \right.$$

$$H(r, r) = \hat{r} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \varphi_2(\hat{r}) - \frac{1}{N_2} [A_3(r_2) \varphi_3(\hat{r}) - A_1(r_2) \varphi_4(\hat{r})] \right\} \varphi_3(r) \\ + \left\{ -\varphi_1(\hat{r}) + \frac{1}{N_2} [A_1(r_2) \varphi_3(\hat{r}) - A_2(r_2) \varphi_4(\hat{r})] \right\} \varphi_4(r) \\ \quad \text{für } r \leq \hat{r}; \\ \left\{ \varphi_2(r) - \frac{1}{N_2} [A_3(r_2) \varphi_3(r) - A_1(r_2) \varphi_4(r)] \right\} \varphi_3(\hat{r}) \\ + \left\{ -\varphi_1(r) + \frac{1}{N_2} [A_1(r_2) \varphi_3(r) - A_2(r_2) \varphi_4(r)] \right\} \varphi_4(\hat{r}) \\ \quad \text{für } r \geq \hat{r}, \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

mit

$$r = \sigma (\bar{R}_2 - y); \quad \hat{r} = \sigma (\bar{R}_2 - \hat{y}); \quad r_1 = \sigma (\bar{R}_2 - 1); \quad r_2 = \sigma \bar{R}_2,$$

$$N_1 = I_1(r_1) K_1(r_2) - I_1(r_2) K_1(r_1); \quad N_2 = [A_1(r_1)]^2 - A_2(r_2) A_3(r_2).$$

Mit Hilfe von G und H lässt sich nun (1.4) in ein System von Integralgleichungen überführen:

$$u_1(y) = 2 A \int_0^1 G(y, \hat{y}) v_1(\hat{y}) d\hat{y}, \quad v_1(y) = 2 \sigma^2 \mu \int_0^1 H(y, \hat{y}) \frac{u_0(\hat{y})}{R_2 - \hat{y}} d\hat{y},$$

oder zusammengefasst

$$v_1(y) = \mu \int_0^1 M(y, \hat{y}) v_1(\hat{y}) d\hat{y}, \quad (3.3)$$

mit dem Kern

$$M(y, y) = 4 \sigma^2 A \int_0^1 H(y, \bar{y}) \frac{u_0(\bar{y})}{R_2 - \bar{y}} G(\bar{y}, \hat{y}) d\bar{y}. \quad (3.31)$$

Greift man auf die Aussage des Hilfssatzes 1 des vorigen Paragraphen zurück, so erkennt man, dass das Vorzeichen des Kerns M durch das Vorzeichen von $u_0(y)$ und von A bestimmt ist; denn H und G besitzen im Quadrat Q keine Nullstelle. Wir beschränken uns nun für den Existenzbeweis auf solche Grundströmungen, für die $A < 0$ und $u_0 \geq 0$ gilt.

Während mit der letzten Ungleichung der für die Stabilitätstheorie durchaus bedeutungsvolle Fall gegenseitig rotierender Zylinder ausgeschlossen wird und damit die Existenzfrage des Eigenwertes hierfür offen bleibt, kann dagegen der Bereich $A \geq 0$, das heisst $\omega_2/\omega_1 \geq R_2^2/R_1^2$ ausser acht gelassen werden, ohne dass dadurch die Klasse der zugelassenen und für die Stabilitätstheorie interessanten Grundströmungen eingeschränkt wird. Man weiss nämlich auf Grund eines Rayleighschen Stabilitätskriteriums, dass alle möglichen Strömungen der Taylorschen Versuchsanordnung, für die $A \geq 0$ gilt, gegenüber Störungen des hier betrachteten Typs stabil sind. Dieses Kriterium wurde für reibende Flüssigkeiten erstmals von J. L. SYNGE [9] bewiesen.

Mit der Aussage von Hilfssatz 1 aus § 2 und den oben gemachten Annahmen: $u_0 \geq 0$ und $A < 0$ ($\omega_2/\omega_1 < R_2^2/R_1^2$) lassen sich jetzt für den Kern M aus (3.31) sofort die folgenden Beziehungen verifizieren:

$$M(y, \hat{y}) > 0 \quad \text{in } Q, \quad M(0, \hat{y}) = M(1, \hat{y}) = M(y, 0) = M(y, 1) = 0.$$

M ist stetig und beschränkt und daher quadratisch integrierbar. Nun verbürgt aber ein Satz von JENTZSCH⁴⁾, dass jeder quadratisch integrierbare Kern, der höchstens in einer Menge vom Mass Null verschwindet und sonst positiv ist,

⁴⁾ Der Satz von JENTZSCH wurde zuerst von HÄMMERLIN [4] zum Beweis der Existenz eines kleinsten positiven Eigenwertes herangezogen, und zwar für den Nachweis der Instabilität einer Grenzschichtströmung längs einer konkaven Wand gegenüber Görtler-Wirbeln. Im Falle der Taylorschen Zylinder wurde die obige Aussage unter der Einschränkung $h \ll R_2$ von WITTING [7] bewiesen.

einen einfachen und vom Betrag kleinsten Eigenwert besitzt. Ferner hat die zugehörige Eigenfunktion im ganzen Intervall dasselbe Vorzeichen.

Mithin existiert für jedes $\sigma > 0$ ein dem Betrag nach kleinster positiver Eigenwert $\mu_0 = Re_0^2$ von (3.3). $v_1(y)$ wechselt im Intervall I das Vorzeichen nicht. Dasselbe gilt nach (3.2) und Hilfssatz 1 dann auch für u_1 .

4. Numerische Ergebnisse

Zur Berechnung des gesuchten Eigenwertes definieren wir das folgende Iterationsverfahren:

$$v_1^{(n)}(y) = \int_0^1 M(y, \hat{y}) v_1^{(n-1)}(\hat{y}) d\hat{y}. \quad (4.1)$$

Die Folge

$$\frac{l[v_1^{(n-1)}]}{l[v_1^{(n)}]},$$

wobei $l[v_1]$ ein beliebiges lineares Funktional in v_1 bezeichnet, konvergiert dann für wachsendes n gegen den gesuchten Eigenwert vom kleinsten Betrage, vorausgesetzt, dass die nullte Näherung $v_1^{(0)}$ an der zum Eigenwert gehörigen Eigenfunktion beteiligt ist⁵⁾. Diese Bedingung kann bei der hier vorgenommenen numerischen Durchführung des Iterationsverfahrens als erfüllt angesehen werden.

Da das Verfahren auch dann konvergiert, wenn u_0 das Vorzeichen wechselt, die Zylinder also gegensinnig rotieren, sollen sich die numerischen Auswertungen auch auf diesen Fall erstrecken, obwohl die Existenz des gesuchten Eigenwertes hierfür nicht gesichert wurde.

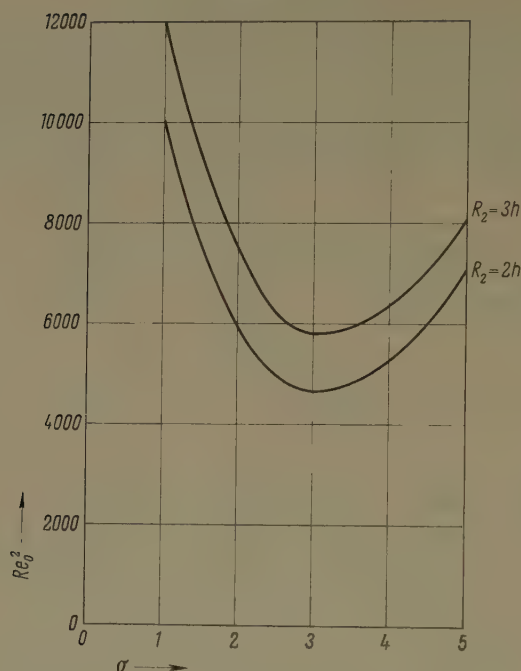
Zunächst wurde der Eigenwert $\mu_0 = Re_0^2$ für die Parameterwerte

$$h = \frac{R_2}{2}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0; \quad h = \frac{R_2}{3}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$$

in Abhängigkeit von σ berechnet ($\sigma = 1, 2, 3, 4, 5$). Das Ergebnis ist in Figur 2 graphisch dargestellt. Der Minimalwert beider Kurven $\mu_{kr} = Re_{kr}^2$ liegt, wie im Taylorschen Grenzfall ($h \ll R_i$) etwa bei $\sigma = 3$. Die Wirbeldicke der am frühesten angefachten Störungen wächst also proportional zu der Spaltbreite h . (σ ist die mit h dimensionslos gemachte Wirbelzahl). Wir geben hier noch die numerisch ermittelten Werte von Re_{kr} , also die Minimalwerte der in Figur 2 gezeichneten neutralen Kurven, an:

$$Re_{kr} = 68,30 \quad \text{für} \quad h = \frac{R_2}{2}, \quad Re_{kr} = 76,34 \quad \text{für} \quad h = \frac{R_2}{3}.$$

⁵⁾ Zum Begriff der Beteiligung vgl. WIELANDT [10].

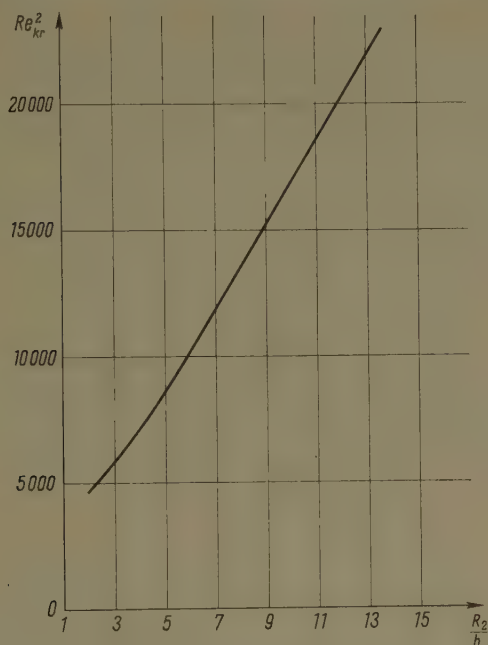


Figur 2

Das Quadrat der Reynoldszahl in Abhängigkeit von der Wirbelzahl σ ($R_2 = 2h$; $R_2 = 3h$; $\omega_2/\omega_1 = 0$).

Ein anschauliches Bild vom Zusammenhang zwischen der kritischen Reynoldszahl Re_{kr} und der relativen Spaltbreite h/R_2 erhält man, wenn man, wie es in Figur 3 geschehen ist, neben den oben bestimmten Werten für Re_{kr}^2 , die Taylorschen Resultate benutzt, die das asymptotische Verhalten von Re_{kr}^2 für $h/R_2 \rightarrow 0$ wiedergeben. Weiterhin kann die von WITTING in [7] berechnete Korrektur des Eigenwertverhaltens von der Ordnung $O(h^2/R_2^2)$ verwendet werden. Aus Figur 3, in der aus graphischen Gründen Re_{kr}^2 in Abhängigkeit von der reziproken relativen Spaltbreite R_2/h dargestellt ist, ersieht man nun, dass Re_{kr}^2 mit wachsender relativer Spaltbreite fällt; jedoch schwächer als linear in R_2/h , wie es nach der Taylorschen Theorie zu erwarten gewesen wäre.

Die kritische Re -Zahl wurde ausserdem für verschiedene Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten ω_2/ω_1 bestimmt. Das Minimum von Re_{kr}^2 liegt, wie Figur 4 zeigt, in beiden Fällen in der Nähe des Wertes $\omega_2/\omega_1 = -0,1$. Die Grundströmung ist daher, für die betrachteten endlichen Spaltbreiten im Gegensatz zum Taylorschen Grenzfall $h \gg R_2$, bei variablem ω_2/ω_1 am frühesten instabil, wenn der äussere Zylinder mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = -0,1 \omega_1$ rotiert.



Figur 3

Das Quadrat der kritischen Reynoldszahl in Abhängigkeit von der reziproken relativen Spaltbreite ($\sigma = 3$; $\omega_2/\omega_1 = 0$).

Die numerischen Ergebnisse erlauben für den Fall $R_2 = 2h$ einen Vergleich mit einem experimentellen Resultat von DONELLY [5], der in seinen Untersuchungen an Stelle der hier ermittelten Reynoldszahl die kritische Taylorzahl Ta angibt. Diese ist definiert durch die Gleichung

$$Ta = 4 \left(\frac{\omega_1 R_1^2}{\nu} \right)^2 \frac{(1 - \omega_2/\omega_1) (1 - R_2^2 \omega_2 / R_1^2 \omega_1)}{[1 - R_1^2 / R_2^2]^2}.$$

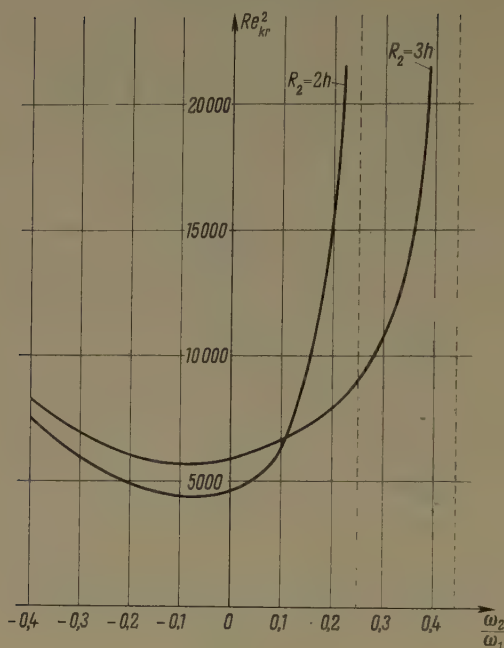
Für $\omega_2/\omega_1 = 0$ und $h = R_2/2$ ergibt sich hieraus:

$$Ta = \frac{64}{9} \left(\frac{R_1^2 \omega_1}{\nu} \right)^2.$$

Umgerechnet auf die Reynoldszahl $Re = R_1 \omega_1 h / \nu$ lautet DONELLY's Ergebnis in diesem Fall:

$$Ta_{kr} = \frac{64}{9} \left(\frac{R_1^2 \omega_1}{\nu} \right)_{kr}^2 = \frac{64}{9} Re_{kr}^2 = 32780 \pm 130.$$

Durch Multiplikation der oben berechneten Grösse $Re_{kr}^2 = (68,30)^2$ mit dem



Figur 4

Das Quadrat der kritischen Reynoldszahl in Abhängigkeit vom Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_2/ω_1 ($\sigma = 3$; $R_2 = 2h$; $R_2 = 3h$).

Faktor $64/9$ ergibt sich:

$$\frac{64}{9} Re_{kr}^2 = Ta_{kr} = 33173.$$

Das errechnete und das experimentell bestimmte Ta_{kr} weichen also um etwa 1% voneinander ab.

CHANDRASEKHAR gibt in [2] als berechneten Wert $Ta_{kr} = 33100$ an, dessen prozentuale Abweichung vom experimentellen Wert um ein Geringes kleiner als der hier ermittelte Wert ist. Letzterer liesse sich jedoch durch Verwendung einer genaueren Integrationsmethode beim Iterationsverfahren weiter verbessern.

Zum Schluss soll hier noch das Verhalten des Eigenwertes $\mu_0 = Re_0^2$ für $\sigma \rightarrow 0$ bestimmt werden, das heisst für den nur mathematisch interessierenden Grenzfall unendlich gross werdender Wirbelabmessungen.

Wir betrachten zunächst die Greenschen Funktionen in diesem Grenzfall. Dazu ziehen wir die Aussage des Hilfssatzes 2 heran, wonach die Funktionen G und H für $\sigma \rightarrow 0$ gleichmässig gegen die Greenschen Funktionen G_0 und H_0 der Operatoren L_0 und L_0^2 streben. Fasst man nun $\sigma^2 \mu_0$ in (3.3) zu einem neuen

Eigenwert $\bar{\mu}_0$ zusammen, so besitzt μ_0 im Grenzfall $\sigma = 0$ einen endlichen Grenzwert. Dies folgt aus der Tatsache, dass sich der Eigenwert bei gleichmässig stetiger Veränderung des Kerns stetig ändert (vgl. BÜCKNER [11]). Der Wert von $\bar{\mu}_0$ für $\sigma = 0$ ergibt sich mit Hilfe des oben beschriebenen Iterationsverfahrens aus der Integralgleichung (3.3), wenn man dort G durch G_0 und H durch H_0 ⁶⁾ ersetzt.

Für das asymptotische Verhalten von μ_0 selbst folgt dann:

$$\mu_0 = \frac{\bar{\mu}_0}{\sigma^2} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0, \quad (\bar{\mu} = \text{const}),$$

ein Resultat, das insbesondere auch für den Taylorschen Grenzfall $h \ll R_2$ gilt und übrigens auch für die Görtlersche Theorie der Grenzschichtinstabilität an einer konkaven Wand. Im ersten Fall wurde es von WITTING [7], im zweiten Falle von HÄMMERLIN [12] bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. I. TAYLOR, *Stability of a Viscous Liquid Contained Between two Rotating Cylinders*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, [A] 223, 289 (1923).
- [2] S. CHANDRASEKHAR, *The Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders*, Proc. Roy. Soc. [A], 246, 301 (1958).
- [3] H. GÖRTLER, *Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I, Neue Folge 2, 1 (1940).
- [4] G. HÄMMERLIN, *Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, J. Rat. Mech. Anal. 4, 279 (1955).
- [5] R. J. DONELLY, *Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders*, Proc. Roy. Soc. [A], 246, 312 (1958).
- [6] H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, 3. Auflage (Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1958) S. 69.
- [7] H. WITTING, *Über den Einfluss der Stromlinienkrümmung auf die Stabilität laminarer Strömungen*, Arch. Rat. Mech. Anal. 2, 243 (1958).
- [8] R. JENTZSCH, *Über Integralgleichungen mit positivem Kern*, J. Math. 141, 235 (1912).
- [9] J. L. SYNGE, *On the Stability of a Viscous Liquid Between Rotating Coaxial Cylinders*, Proc. Roy. Soc. [A], 167, 250 (1938).
- [10] H. WIELANDT, *Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten Eigenwertaufgaben*, Math. Z. 50, 93 (1944).
- [11] H. BÜCKNER, *Die praktische Behandlung von Integralgleichungen*, Ergebnisse der Angew. Math., Bd. I, (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952), S. 81.
- [12] G. HÄMMERLIN, *Zur Theorie der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten*, ZAMP 7, 156 (1956).

⁶⁾ G_0 und H_0 besitzen eine ähnliche Gestalt wie G und H . Sie gehen aus diesen hervor, wenn man in (3.1) I_1 durch I_0 , K_1 durch K_0 und r durch $\varrho = R_2 - y$ ersetzt.

Summary

An investigation is made of the instability of stationary flow between two rotating cylinders for any gap distance. Previous work on this problem, viz. the Taylor theory, has been done with the restriction of small gaps. Moreover, in contrast to the recent work of S. CHANDRASEKHAR [2], who has also analysed this problem, the method used is independent of the basic flow and is therefore valid for all flows between two coaxial cylinders. In fact, it can even be used for the analysis of the flow in a curved channel.

The major item of physical interest is the critical Reynoldsnumber, i. e. the value of the Reynoldsnumber where small disturbances are amplified for the first time. The value of this parameter is determined by the smallest positive eigenvalue of the boundary value problem. An existence proof is made for this eigenvalue for any wavenumber and for all possible cases of cylindrical flow, with the exception of the case where the cylinders rotate in opposite directions. The results are depicted in a convenient form, where the critical Reynoldsnumber is the dependent variable and the gap distance and the angular velocity ratio of the two cylinders are the independent variables respectively.

A comparison with experiment is made for the case where the ratio of the two radii is 2:1 and the outer cylinder is at rest. The agreement with the theory is good; the noticeable error being approximately 1%.

(Eingegangen: 20. April 1960.)

Photoelastic Calculations by a Complex Variable Method

By JOHN A. LEWIS and HENRY O. POLLAK, Murray Hill, N. J., USA¹⁾

1. Introduction

From photoelastic observations of isochromatics and isoclinics, one may determine the principal stress difference, $p - q$, and the principal angle α at each point of a slab of transparent, elastic material in a state of plane stress. The shear stress σ_{xy} and the difference of the normal stresses σ_{xx} , σ_{yy} may be calculated immediately from the relations

$$2 \sigma_{xy} = (p - q) \sin 2\alpha, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = (p - q) \cos 2\alpha \quad (1.2)$$

or, in complex form,

$$2w = \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = -(p - q)e^{-2i\alpha}, \quad (1.3)$$

where w is the 'conjugate stress deviator' (see, e. g. [1])²⁾.

¹⁾ Bell Telephone Laboratories, Inc.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 37.

In order to determine the normal stresses themselves, it is necessary to make further experimental observations (e. g. of the thickness change of the loaded slab) or to perform further calculations, using, for example, the given values of $p - q$ and α and the values of the stresses at one point. It is the latter problem with which we are presently concerned.

2. Shear-Difference and Relaxation Methods

The equilibrium equations for an elastic body in a state of plane stress are

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

or, in terms of the conjugate stress deviator w and the mean normal stress $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \quad (2.3)$$

where

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

For compatibility σ must be a harmonic function. Thus σ has the form

$$\sigma = 2 \operatorname{Re} \Phi(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}, \quad (2.4)$$

where Φ is an analytic function. Equation (2.3) then becomes

$$\Phi'(z) = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}. \quad (2.5)$$

If w is given, Equation (2.3) or (2.5) shows that σ or Φ may be calculated up to an integration constant. Equation (2.5) yields

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dz. \quad (2.6)$$

This is the technique employed (in real form) in the so-called shear-difference method. It requires the numerical differentiation of w , which is given experimentally. This may place undue emphasis on random experimental errors when the mesh spacing in a finite difference scheme is small.

This source of error may be avoided by calculating the harmonic function σ in the region directly from its boundary values, e. g. by relaxation. The boundary values may be determined from the surface tractions (X , Y) and the

stress deviator w from the formula

$$i d\bar{F} = i (X - i Y) ds = \sigma d\bar{z} + w dz, \quad (2.7)$$

for the x - and y -components of surface traction on the line elements ds of the arc $z = z(s)$. This method of 'harmonization', however, requires detailed knowledge of the surface tractions, information which may not be available.

The shear-difference method could be used to determine boundary values of σ for relaxation in a subregion, but one would still be limited in accuracy by the numerical differentiation required.

In the following sections we shall obtain formulae for Φ which avoid this difficulty by the simple application of the Cauchy integral formula on circles in the region.

3. The Single-Circle Method

We first note that Equation (2.5) implies that w has the form

$$w = \bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z), \quad (3.1)$$

where Ψ is an analytic function. This may also be written as

$$(\bar{z} - \bar{z}_0) \Phi'(z) + \Psi(z) + \bar{z}_0 \Phi'(z) = w(z). \quad (3.2)$$

Now consider the values of the above functions on the circle $C: |\zeta - z_0| = R$, where C and its interior lie within the region D under consideration. Since on C

$$\bar{\zeta} - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{\zeta - z_0},$$

Equation (3.2) may be written on C as

$$R^2 (\zeta - z_0)^{-1} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) + \bar{z}_0 \Phi'(\zeta) = w(\zeta). \quad (3.3)$$

We observe that both $\Psi(z)$ and $\bar{z}_0 \Phi'(z)$ are analytic functions on C and its interior and hence contribute nothing to a contour integral of Equation (3.3) around C . Furthermore R is a constant, so that we find on integration, using the Cauchy integral formula,

$$\frac{R^2}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi'(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = R^2 \Phi'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C w(\zeta) d\zeta, \quad (3.4)$$

or

$$\Phi'(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} w(z_0 + R e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta, \quad (3.5)$$

where

$$\zeta = z_0 + R e^{i\theta}.$$

Parenthetically, note that, if we multiply Equation (3.3) by $(\zeta - z_0)^n$ and integrate, we obtain the identities

$$\int_0^{2\pi} w(z_0 + R e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0, \quad \text{for } n = 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

These might serve as checks on the consistency of the experimental data. It is also interesting to note that Equation (3.5) may be obtained by integrating Equation (2.7) around C . Equation (3.5) thus merely states that the resultant force on C must vanish.

$\Phi'(z)$ can thus be calculated throughout the interior of D by laying down circles of convenient size around every point at which its value is desired. The function $\Phi(z)$ may then be determined, up to an integration constant, by taking a line integral along any path in the region, so that

$$\Phi(z) = \Phi_0 + \int_0^z \Phi'(z) dz, \quad (3.7)$$

where the integration constant Φ_0 might be the value of Φ at the origin, taken to lie in the region. The real part of Φ_0 , which is all which is required, may be determined by inspection if the stresses are given at some interior point. Usually, however, the point at which the stresses are known lies on the boundary of the region (e. g. on a boundary free of surface tractions). In this case $\text{Re } \Phi_0$ might be determined by extrapolation of $\Phi - \Phi_0$ to the boundary and comparison with the given value at the point.

This method uses the given data rather inefficiently, a set of values of w on a given circle being used for the determination of the value of Φ' at but a single point. We shall refer to this method as the 'single-circle' method. In the next section we shall develop methods which use the data more efficiently at the expense of slight additional complexity.

4. The Two-Circle Method

Equation (3.3) can also be written in the form

$$[R^2 + \bar{z}_0(\zeta - z_0)] \Phi'(\zeta) + (\zeta - z_0) \Psi(\zeta) = (\zeta - z_0) w(\zeta). \quad (4.1)$$

If we multiply this equation by $(\zeta - z)^{-1}$, where z lies within C , and integrate around C , there results

$$[R^2 + \bar{z}_0(z - z_0)] \Phi'(z) + (z - z_0) \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta - z_0) w(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (4.2)$$

by the Cauchy integral formula. This relation holds on the interior of any circle

$C_k: |\zeta - z_k| = R_k$ in the region D . In particular, if we take two circles C_1, C_2 , having some portion of their interiors in common, we obtain two independent equations for $\Phi'(z)$ and $\Psi(z)$ for z in this common region, viz,

$$[R_k^2 + \bar{z}_k(z - z_k)] \Phi'(z) + (z - z_k) \Psi(z) = W_k, \quad k = 1, 2, \quad (4.3)$$

where

$$W_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{(\zeta - z_0) w(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (4.4)$$

These equations, of course, are not solvable for values of z at which they are not independent. For example, if the circles are concentric ($z_1 = z_2 = z_0$), at the center $z = z_0$ Equation (4.4) reduces to Equation (3.4). In this special case the equations obviously cannot be solved for $\Psi(z_0)$, since its coefficient vanishes. In general, the equations are independent if the coefficient determinant

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} R_1^2 + \bar{z}_1(z - z_1) & z - z_1 \\ R_2^2 + \bar{z}_2(z - z_2) & z - z_2 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

is non-vanishing. It turns out that if one circle lies entirely within the other, $\Delta(z)$ always has one zero within the smaller circle, i. e. in the region of applicability of Equation (4.3), and one outside, both of them lying on the line passing through z_1 and z_2 . If the two circles touch, $\Delta(z)$ has a double zero at the point of tangency and finally, if they intersect, the zeros lie at the intersection points.

The use of concentric circles $C_1: |\zeta - z_0| = R_1$, $C_2: |\zeta - z_0| = R_2$, with $R_1 < R_2$, leads to an especially simple expression for $\Phi'(z)$ namely,

$$\Phi'(z) = \frac{W_2 - W_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (4.6)$$

for $|z - z_0| < R_1$. Obviously this formula also holds at $z = z_0$ by Equation (3.5). It yields values of $\Phi'(z)$ all over the interior of C_1 . We may now compute $\Phi(z)$, up to an integration constant, by evaluating a line integral on $\Phi'(z)$, given by Equation (4.6) over any path lying within C_1 . If we integrate Equation (4.6) there results

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (4.7)$$

with

$$\Omega_k = \int_{z_0}^z W_k dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} (\zeta - z_0) w(\zeta) \log \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.8)$$

We have now obtained a rather simple formula for Φ itself which holds all over the interior of the circle $C_1: |z - z_0| < R_1$. Note that for all z in C_1 ,

one uses the same sets of values of w on C_1 and C_2 . Once w has been evaluated by experimental observation on a set of suitably chosen circle-pairs, covering the region, Φ may be computed directly from the above. If we set

$$\zeta = z_0 + R_k e^{i\theta}, \quad \text{on } C_1 \text{ and } C_2, \quad z = z_0 + R_1 r e^{i\varphi}, \quad 0 \leq r < 1,$$

$$r_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad w_k(\theta) = w(z_0 + R_k e^{i\theta}),$$

we obtain

$$\Omega_1(r, \varphi) = -\frac{R_1^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} w_1(\theta) \log(1 - r e^{i(\varphi-\theta)}) d\theta, \quad (4.9)$$

$$\Omega_2(r, \varphi) = -\frac{R_2^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} w_2(\theta) \log(1 - r_1 r e^{i(\varphi-\theta)}) d\theta. \quad (4.10)$$

Similar, but considerably more intricate, formulae are obtained when the circles are non-concentric. Although for a region of some particular shape it might be advantageous to use such a configuration, in general these formulae do not appear to be particularly useful, especially when one recalls that some neighbourhood of the zero of $\Delta(z)$ must be excluded.

5. Determination of the Integration Constant

We now assume that the computation implied by Equation (4.7) has been carried out over a suitable set of covering circle-pairs in the region. If the circles overlap, the set of integration constants, one for each circle-pair, can obviously be reduced to a single one, Φ_0 say. We assume that this has been done. We now have a function

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z) - \Phi_0,$$

given all over the region D and we wish to determine Φ_0 or, more precisely, its real part.

As has been mentioned, it is necessary to add other information than the photoelastic data, given by w , to determine the stresses completely, i. e. in the present case to determine $\text{Re } \Phi_0$. Usually, in practice one knows the total load on some segment of the boundary. For example, on any segment of a free boundary the total load is zero. We now develop a method for the determination of $\text{Re } \Phi_0$ which depends on the knowledge of the resultant force on some finite segment of the boundary.

By Equation (2.9), the resultant force on an arc AB is

$$i F_{AB} = + 2 \int_A^B \text{Re } \Phi(z) dz + \overline{\int_A^B w(z) dz}$$

or, substituting $\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi_0$ and solving for Φ_0 ,

$$2(B-A) \operatorname{Re} \Phi_0 = i F_{AB} - 2 \int_A^B \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(z) dz + \int_A^B w(z) dz. \quad (5.1)$$

If we take A and B to be two points on the boundary between which the resultant force F_{AB} is known, Equation (5.1) yield $\operatorname{Re} \Phi_0$, since both $\tilde{\Phi}(z)$ and $w(z)$ are known in the region. This completes the solution of the problem.

6. Further Observations on the Method

The derivations given in Sections 3 and 4 depend for their success on the fact that on the periphery of a circle, \bar{z} is a very simple function of z . If z_0 is the center and R the radius of the circle in question, then, on the periphery,

$$\bar{z} = \bar{z}_0 + \frac{R^2}{z - z_0}. \quad (6.1)$$

Using this relation, we are able to do contour integrals of expressions involving \bar{z} by the calculus of residues, and this is the key to our technique. Now on any analytic curve, \bar{z} may be considered as a function of z , which function will be analytic in a neighbourhood of the curve (although it represents \bar{z} , of course, only on the curve). If on any curve γ , \bar{z} should happen to be a *rational* function of z , we may again obtain $\Phi(z)$ from Equation (3.1) by contour integration.

Unfortunately, it turns out that we have already exhausted what can be done in just this fashion. For we have the following:

Theorem. Let $\bar{z} = S(z)$ on a closed analytic curve γ . Then $S(z)$ is a rational function of z if and only if γ is a circle, in which case $S(z)$ is given by Equation (6.1).

This theorem appears in [2], which paper also studies other properties of the function $S(z)$ for arbitrary curves γ . The most important for our present thinking are that $S(z)$ must always have singularities inside the closed contour γ and that $S(z)$ cannot have a single-valued integral.

The next simplest case after circles which one can consider is that of ellipses. On the ellipse E :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (6.2)$$

\bar{z} is given by the following function of z :

$$S(z) = \bar{z}_0 + (z - z_0) \frac{b^2 + a^2 - 2ab\sqrt{1 - (a^2 - b^2)/(z - z_0)^2}}{a^2 - b^2}.$$

Hence we may write, after some manipulation,

$$\left. \begin{aligned} \int_E \frac{\Phi'(\zeta) \bar{z}_0 + \Psi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta + \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_E \frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ + \frac{2ab}{b^2 - a^2} \int_E \frac{\sqrt{1 - (a^2 - b^2)/(\zeta - z_0)^2}}{(\zeta - z)} d\zeta = \int \frac{w(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

If we now take three confocal ellipses, then each of the three integrals on the left-hand side of Equation (6.3) will be the same no matter which ellipse we are on. This is true since z_0 , the center of the ellipses, and $a^2 - b^2$, up to a possible minus sign the square of the distance between the foci, will be the same. Hence three equations of the form Equation (6.3) can be solved simultaneously for, in particular, the *second* integral, which equals $2\pi i \Phi'(z)$. We can do this if the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1^2 + a_1^2 & 2a_1b_1 \\ 1 & b_2^2 + a_2^2 & 2a_2b_2 \\ 1 & b_3^2 + a_3^2 & 2a_3b_3 \end{vmatrix}$$

where $a_j^2 - b_j^2 = c^2$, does not vanish, and this is true in general.

Thus we may use three confocal ellipses E_j and obtain $\Phi(z)$ up to a constant $\Phi(z_0)$ at any point interior to all three by forming a linear combination of

$$\frac{i}{2\pi i} \int_{E_i} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z_0} \log \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} d\zeta,$$

as was done in Section 4 for two circles. The advantage which the three ellipses might offer in some cases over two circles is that a larger portion of a long thin region may well be within three ellipses than within even several pairs of concentric circles.

REFERENCES

- [1] P. F. NEMÉNYI and A. W. SÁENZ, *On the Geometry of Two-Dimensional Elastic Stress Fields*, J. Rat. Mech. Anal., **1**, 73-86 (1952).
- [2] PH. DAVIS and H. POLLAK, *On the Analytic Continuation of Mapping Functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **87**, 198-225 (1958).

Zusammenfassung

Die komplexe Darstellung der allgemeinen Lösung für den ebenen elastischen Spannungszustand führt zu einer einfachen Formel für den Mittelwert der Normalspannung im Prüfstück, die sich spannungsoptischer Messungen auf zwei Kreisen bedient. Diese Formel vermeidet die Messfehler betonende numerische Differenziation und benötigt die Kenntnis der Randspannungen an jedem Randpunkte nicht.

(Received: Mai 5, 1960.)

Design of Large Permanent Magnets with Rotationally Symmetrical Poles¹⁾

By DIMITRIJE UGRIN-ŠPARAC, Zagreb²⁾, Yugoslavia

1. Introduction

All difficulties in design calculations of a large permanent magnet arise not only from nonlinearity of the demagnetization curves, but also from the fact that permeance of the air is not negligible as compared to that of the magnetic material.

To be precise, we must distinguish between two kinds of losses: fringing in the gap and leakage from the surfaces of the magnetic material and polecaps.

Classical methods of design calculation use HOPKINSON's leakage factor, obtained by conformal mapping for appropriate configurations. Though the leakage factor method is a very simple one, and accurate within practical limits (see for instance references [1]³⁾ and [2]) it does not give any deeper insight into the refined geometrical problems of large permanent magnets.

Another method, that can be called the distributed parameter method, will be developed and applied here. It concerns above all the design of large permanent magnets for studying nuclear magnetic resonance, but it is also applicable equally well to permanent magnets of any size, provided that initial conditions (as defined in Section 5) are in the proper range.

2. One Approach to the Problem

Consider the pair of identical rotationally symmetrical magnetic poles with axial cross-section as indicated in Figure 1. Making differential shifts from radial cross-sections 1-2 and 3-4 to radial cross-sections 5-6 and 7-8 respectively, increase in magnetic flux of either pole will be

$$d\Phi = U dP \quad (1)$$

where U is the magnetic potential difference between rings 1-2-5-6 and 3-4-7-8, dP permeance of the corresponding air shell. For the sake of simpli-

¹⁾ This work was resulted from a preliminary design calculation of the large permanent magnet for high resolution nuclear magnetic resonance, that will be constructed for the Department of Structural and Inorganic Chemistry, Institute «Rudjer Bošković», Zagreb.

²⁾ Institute «Rudjer Bošković», Zagreb.

³⁾ Number in brackets refer to References, page 52.

city in making an approximative design calculation we shall boldly assume that the lines of force 1-3, 2-4, etc. are parts of circles with centers in the origin O . This idea was borrowed from [3], p. 107. It should be noted at once that to assume circular lines of force leads, at least in the vicinity of the gap, to an overestimation of the size of the magnet, but the usefulness of such an approximation will be further justified.

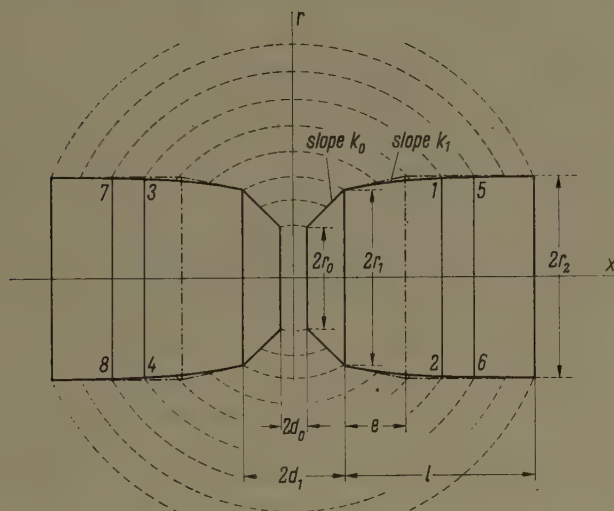


Figure 1

Axial cross-section of the rotationally symmetrical magnetic poles, with indicated substitution (dot-dashed lines) for curved tapering of the polepieces. The figure also explains symbols used in the text.

Modifying the expression for the permeance of a spherical air shell, derived from [3] (page 109, Equation (13)), we can obtain

$$dP = \frac{\pi \mu_0 d(\sqrt{x^2 + r^2})}{\operatorname{arsinh}(x/r)}. \quad (2)$$

The second equation that we need for the design calculation of the permanent magnet would read

$$dU = -2 H_m dx, \quad (3)$$

where H_m is the magnetic field intensity in the magnet.

Differential equations (1) and (3) could be rewritten as follows

$$\frac{d\Phi}{dx} = U \frac{dP}{dx}, \quad (1a)$$

$$\frac{dU}{dx} = -2 H_m. \quad (3a)$$

These equations together with the demagnetization curve of the selected magnetic material entirely describe the situation that we encounter in designing large permanent magnets with rotationally symmetrical poles.

3. On the Demagnetization Curve for Large Blocks of the Anisotropic Magnetic Material

ANDREW and RUSHWORTH [1] have already shown that there are great discrepancies between the demagnetization curves of small and large anisotropic magnetic material specimens. They found decrease in the average BH -product for their Alcomax III poles to be 1.5 m.g.o., namely from 4.75 m.g.o. for small specimens this product has fallen to 3.25 m.g.o. for large blocks. Hence, when dealing with anisotropic magnetic material, we shall generally reduce the factory data for $(BH)_{max}$ by a factor of 0.685.

Another large permanent magnet (University of Leeds magnet) was made from Columax magnetic material. A factory leaflet gives the range 600 to 640 Oe for magnetic field intensity at the $(BH)_{max}$ point. Now, from induction in the gap and dimensions of this magnet we find 0.8 to 0.85 to be the range of the factor, by which we must reduce the magnetic field intensity at $(BH)_{max}$ point (and anywhere along the demagnetization curve). It is perhaps a matter of taste which number will be chosen from this range. We shall take 0.85. Thus, decrease in the magnetic induction would be determined by the factor $0.685/0.85 = 0.8$.

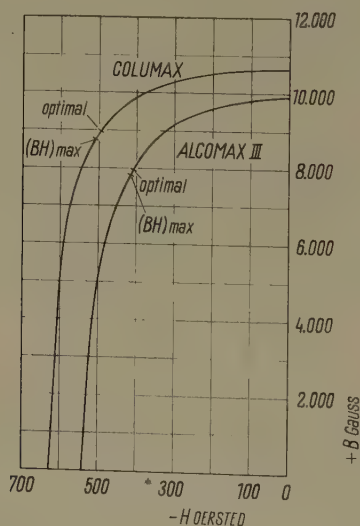


Figure 2

Reduced demagnetization curves for large blocks of the denoted magnetic materials.

Figure 2 shows Alcomax III and Columax reduced demagnetization curves, prepared for future reference.

From the above discussion we can conclude that magnetic material data, given for small specimens of anisotropic material, may be very imprecise for large blocks, making any method of design calculation only approximative. This fact presents the first justification of the approximation introduced in the Section 2.

4. Distributed Parameter Method of Design Calculation for Large Permanent Magnets With Rotationally Symmetrical Poles

4.1. *Calculation of the polecaps.* One use of the polecaps is to match induction B_m in the interior of the polepieces with induction B_a within the gap. Another use of the polecaps is to homogenize the field within the gap, as is the case, for instance, with large magnets for nuclear magnetic resonance.

We shall investigate only this matching property of the polecaps. The quotient

$$m = \frac{B_a}{B_m} \tag{4}$$

will be named the induction ratio. Supposing polecaps with infinite permeance, the magnetic potential difference between the surfaces of these polecaps will be

$$U_a = 2 d_0 H_a = 2 d_0 \frac{B_a}{\mu_0}, \tag{5}$$

where $2 d_0$ is the gap length according to Figure 1, and H_a the magnetic field intensity within the gap. To obtain normalized formulae, let the half gap length d_0 be the length unit. Referring to Figure 1, we shall use the following designations:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{d_0}; \quad \delta = \frac{d_1}{d_0}; \quad \lambda = \frac{l}{d_0}; \quad \varepsilon = \frac{e}{d_0}; \quad \varrho = \frac{r}{d_0}; \\ \varrho_0 &= \frac{r_0}{d_0}; \quad \varrho_1 = \frac{r_1}{d_0}; \quad \varrho_2 = \frac{r_2}{d_0}; \quad k_0 = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\delta - 1}; \quad k_1 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Total flux, flowing from either polepiece into the attached polecap, divides into two parts: flux Φ_1 that flows through the gap, and flux Φ_2 representing the leakage flux from the polecap lateral surface.

As it is made in reference [3], p. 68, fringing in the gap can be taken into account enlarging diameter of the gap by one gap length

$$\Phi_1 = B_a (r_0 + d_0)^2 \pi.$$

This is valid for cylindrical polecaps if the gap ratio $\varrho_0 \geq 5$, but for conical ones with slope k_0 about 1 we shall extend this range to $\varrho_0 \geq 3$.

Further, leakage flux Φ_2 can be found by means of equations (1), (2) and (5):

$$\Phi_2 = \mu_0 \pi U_a \int_{d_0}^{d_1} \frac{d(\sqrt{x^2 + r^2})}{\operatorname{arsinh}(x/r)} = 2 d_0^2 \pi B_a I,$$

where

$$I = \int_1^\delta \frac{k_0 + \xi/\varrho}{\sqrt{1 + (\xi/\varrho)^2} \operatorname{arsinh}(\xi/\varrho)} d\xi.$$

Denoting $\eta = \xi/\varrho$, one part of the integrand would be

$$\kappa = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2} \operatorname{arsinh} \eta}. \quad (7)$$

The graph of this function, which will be important later, is shown in Figure 3. It can be proved that $\eta < \delta/\varrho_1$ if $k_0 < \varrho_0$. This latter condition will be fulfilled for every practical case. Thus we may expect η to be less than, say, $7/11 = 0.64$. A first approximation for the function $\kappa = \kappa(\eta)$ for the given range of η can be seen from Figure 3: $\kappa = 1$. Approximation for the remaining part of the inte-

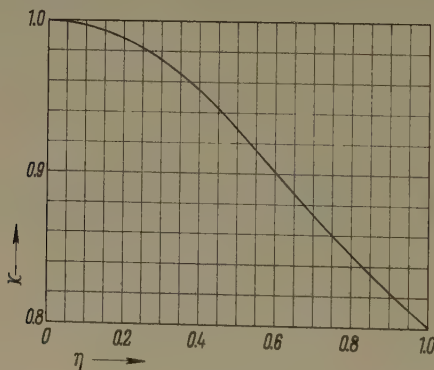


Figure 3

Plot of the function $\kappa = \kappa(\eta)$.

grand is then $k_0 \varrho/\xi$, where $\varrho = \varrho_0 + k_0 (\xi - 1)$. If this bold simplification is allowed, integration is then entirely simple:

$$I = (k_0^2 + 1) (\delta - 1) + k_0 (\varrho_0 - k_0) \ln \delta. \quad (8)$$

We should note that, as the integrand is enlarged, values calculated from (8) will be increased.

Induction on the boundary between the polepiece and the attached polecap was our final aim:

$$B_m = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{r_1^2 \pi} = B_a \frac{(\varrho_0 + 1)^2 + 2 I}{(\varrho_0 + k_0 (\delta - 1))^2},$$

and with the definition equation (4)

$$m = \frac{(\varrho_0 + k_0 (\delta - 1))^2}{(\varrho_0 + 1)^2 + 2 I}. \tag{9}$$

Since the approximative value for I was enlarged, the approximative value for m is diminished. Hence the use of the expression (9) for m leads to additional oversizing of the magnet.

Indeed, although it is not here proved, it may be hoped, that derived formulae cause oversizing of the magnet at least as long as $k_0 \leq \varrho_0$.

Taking the gap ratio ϱ_0 as constant and slope k_0 as parameter, the induction ratio m from (9) can be plotted against δ . Two families of curves, corresponding to $\varrho_0 = 3.7$ (continuous curves) and $\varrho_0 = 7$ (broken-line curves) are shown in Figure 4.

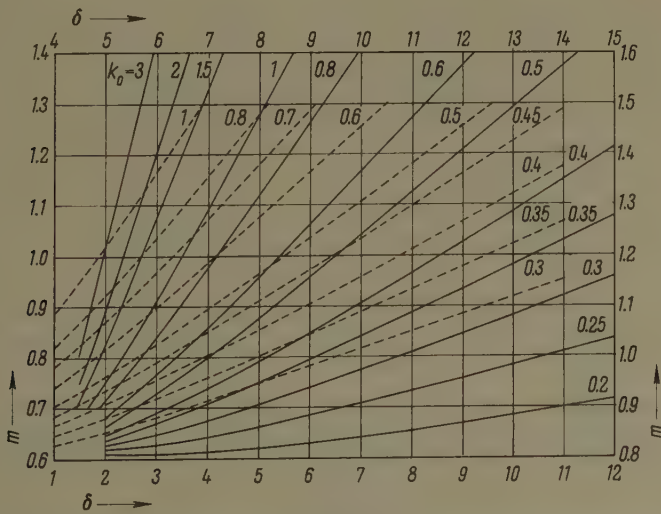


Figure 4

Families of curves corresponding to the function $m = m(\varrho_0, k_0, \delta)$ with k_0 as parameter and gap ratio $\varrho_0 = 3.7$ (full curves, left and lower scales) and $\varrho_0 = 7$ (dashed curves, right and upper scales).

If one family of curves is intersected by a straight line $m = \text{constant}$, and ϱ_1 calculated for pairs of k_0 and δ thus obtained by means of the equation $\varrho_1 = \varrho_0 + k_0 (\delta - 1)$, one can construct another family $\varrho_1 = \varrho_1(m, \delta)$, where m now plays the role of a parameter. Such new families are drawn in Figure 5 for values $\varrho_0 = 3.7$ (continuous) and $\varrho_0 = 7$ (broken line). What is characteristic

and interesting for curves of these families is the existence of the minimal value of ϱ_1 at the fixed induction ratio m . Since, however, this fact is based upon the rather dubious assumption of circular lines of force, we shall try to give a physical explanation.

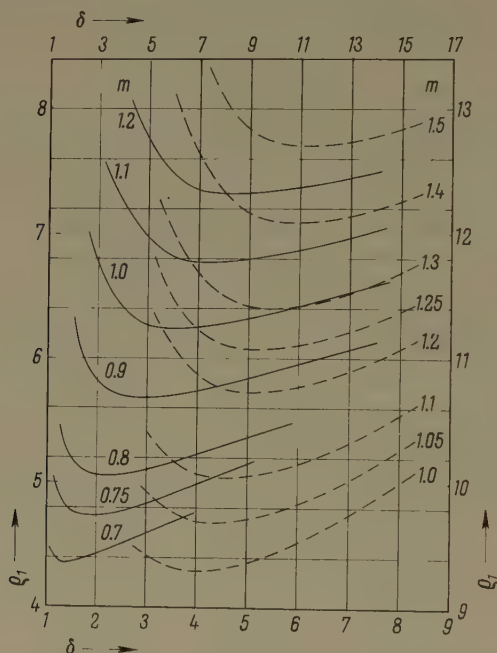


Figure 5

Families of curves corresponding to the function $\varrho_1 = \varrho_1(\varrho_0, m, \delta)$ with m as parameter and gap ratio $\varrho_0 = 3.7$ (full curves, left and lower scales) and $\varrho_0 = 7$ (dashed curves, right and upper scales).

Imagine Figure 1 representing one limiting case: $r_1 > r_0$, $d_1 = d_0$. Let d_1 be slightly increased with r_0 and r_1 unchanged. Increase in the cone lateral surface will be negligible by comparison with the increase in the length of the lines of force. Hence, leakage flux will be decreased and the induction ratio m enlarged. To retain the same induction ratio, we must diminish r_1 . On the other hand, let $r_1 > r_0$, but d_1 much greater than d_0 . Decreasing d_1 slightly, with r_0 and r_1 constant, lines of force lengths will be decreased negligibly as compared with the decrease in the cone lateral surface, thus diminishing the leakage flux and enlarging the induction ratio m . Again, to maintain the same induction ratio, we must diminish r_1 .

Minimal values for ϱ_1 , with m and ϱ_0 fixed, do not necessarily cause minimal volume of the polepiece, as will be shown. But deviations from minimal ϱ_1 being

unimportant in practice, we shall use the functions $\delta = \delta(m, \varrho_0)$ and $\varrho_1 = \varrho_1(m, \varrho_0)$, defined by minimal values of ϱ_1 , taking ϱ_0 as parameter. In this manner, from the families of curves drawn in Figure 5 we arrive at the families of curves shown in Figure 6.

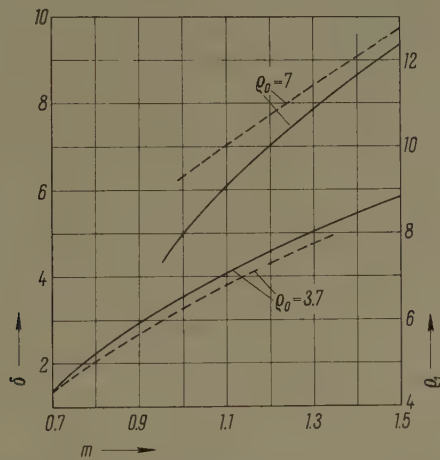


Figure 6

Families of curves corresponding to the function $\delta = \delta(m, \varrho_0)$ (full curves, left and lower scales) and $\varrho_1 = \varrho_1(m, \varrho_0)$ (dashed curves, right and lower scales), defined by minimal values of ϱ_1 , with gap ratio ϱ_0 as parameter.

4.2. *Calculation of the polepieces.* Leaving a detailed discussion of the optimal design for the next Section, we shall deal here with polepieces having a fixed operating point, i. e. where throughout the magnetic material induction B_m is constant. To compensate for leakage flux, radial cross-section of the polepiece must increase from the gap-end towards the yoke-end. As a first attempt to find the shape and dimensions of a constant induction polepiece, we shall neglect the influence of the yoke upon the field distribution. Axial cross-section through the field and the poles is therefore as shown in Figure 1. Let us suppose: 1) polecaps with infinite permeance, 2) an iron yoke with relative permeability μ_{yr} (from 500 to 1000), and 3) the validity of the equations (1a) and (3a) for this case.

To determine the length of the polepiece, we must use the well known magnetic circuit equation

$$2 d_0 H_a + 2 l H_m + 2 L H_y = 0 ,$$

(10)

where the new symbols have the following meanings:

- L half length of a 'C' arm of the double 'C' yoke,
- H_y magnetic field intensity inside the yoke.

Analogously to the equations (4) and (6) we shall define similar nondimensional quantities

$$\lambda' = \frac{H_a}{H_m} = \frac{B_a \text{ (G)}}{H_m \text{ (Oe)}}; \quad y = \frac{L}{d_0}; \quad n = \frac{B_m}{B_y}. \quad (11)$$

Disregarding signs, it follows from equation (10) that

$$\lambda = \lambda' \left(1 + \frac{y}{m n \mu_{yr}} \right).$$

For the first approximation we may take

$$\lambda = \lambda', \quad (12)$$

and for geometrical reasons $y = 2.5 \lambda$, say that the second approximation would be

$$\lambda = \lambda' \left(1 + \frac{2.5 \lambda'}{m n \mu_{yr}} \right). \quad (13)$$

Let us integrate differential equation (3a):

$$U = -2 H_m x + C,$$

remembering U is magnetic potential difference between the pole cross-sections symmetrically placed with respect to the medial plane, and not a magnetic potential. The constant of integration C is determined by the boundary condition $U = U_a$, $x = d_1$. We then take U_a and H_m from (5) and (11) with approximation (12) to obtain the magnetic potential difference distribution

$$U = \frac{2 d_0 B_a}{\mu_0} \left(1 + \frac{\delta - \xi}{\lambda} \right). \quad (14)$$

Substituting expressions (2), (14) and $\Phi = r^2 \pi B_m$ in the differential equation (1a), we find after some rearranging

$$\frac{d\varrho}{d\xi} = \frac{m \xi / \varrho (1 + (\delta - \xi) / \lambda)}{\sqrt{\xi^2 + \varrho^2} \operatorname{arsinh}(\xi / \varrho) - m (1 + (\delta - \xi) / \lambda)}. \quad (15)$$

This differential equation surely has no elementary solution; for the given parameters m , δ , λ and boundary condition $\xi = \delta$; $\varrho = \varrho_1$ we must carry out numerical integration. The Runge-Kutta method, which is exceedingly precise for this calculation by virtue of the approximations made, yields with parameters $m = 1.25$; $\delta = 6$; $\lambda = 21$; $\varrho_1 = 11$ the polepiece profile curve plotted in Figure 7 as the solution of the differential equation (15). The slope of the tangent at the point $\xi = \delta$; $\varrho = \varrho_1$ of a polepiece profile curve is obviously important:

$$k_1 = \frac{\delta}{(\varrho_1 / m) \sqrt{\delta^2 + \varrho_1^2} \operatorname{arsinh}(\delta / \varrho_1) - \varrho_1}.$$

By use of the function $\kappa = \kappa(\eta)$ defined by (7), it can be modified

$$k_1 = \frac{m \kappa \delta}{\varrho_1 (\delta - m \kappa)}. \quad (16)$$

At the point $\xi = \delta + \lambda$; $\varrho = \varrho_2$ the tangent is horizontal.

Engineering practice will probably adopt some simplifications, rejecting curved tapering of the polepieces. In the present paper we shall assume a polepiece shape already proposed by ANDREW and RUSHWORTH [1], namely, conical tapering at the gap-end of the otherwise cylindrical polepieces. If the normalized radius ϱ_2 of the cylindrical part is known, the frustum of the cone will be determined by the slope k_1 and the normalized radius ϱ_1 of its smaller base. Of course, it is not convenient to integrate the differential equation (15) for every particular case, to obtain radius ϱ_2 .

Taking into consideration the influence of the yoke upon the field distribution, let us compare the fields depicted in Figures 1 and 8. Besides the visible difference, the field shown in Figure 8 is no longer rotationally symmetrical. Let us make a seemingly unacceptable assumption: that permeance of the elementary air shells does not depend on their position in space, but has values equal to that of the elementary air shell of the gap-end (more precisely, the initial air shell of the polepiece with neglected slope k_1). Accordingly, assuming the same magnetic potential distribution as before and substituting

$$\frac{dP}{d\kappa} = \mu_0 \pi \frac{\delta/\varrho_1}{\sqrt{1 + (\delta/\varrho_1)^2 \operatorname{arsinh}(\delta/\varrho_1)}} = \mu_0 \pi \kappa$$

in the differential equation (1a) we obtain

$$\frac{d}{d\xi}(\varrho^2) = 2 m \kappa \left(1 + \frac{(\delta - \xi)}{\lambda}\right).$$

After integration that takes into account boundary condition $\xi = \delta$, $\varrho = \varrho_1$, solution of this simple differential equation reads:

$$\varrho^2 + \frac{m \kappa}{\lambda} (\xi - \delta - \lambda)^2 = \varrho_1^2 + m \lambda \kappa.$$

Hence, polepieces are parts of the ellipsoids of revolution. Circular yoke-end of the polepiece with abscissa $\xi = \delta + \lambda$ lies in the equatorial plane of the ellipsoid. Therefore

$$\varrho_2 = \sqrt{\varrho_1^2 + m \lambda \kappa}. \quad (17)$$

From the above 'exact' formula we can derive the approximative one

$$\varrho_2 = \varrho_1 + \frac{m \lambda \kappa}{2 \varrho_1}. \quad (18)$$

Referring to the numerical example, whose solution has been depicted in Figure 7, we are now able to estimate not only what we called the seemingly unacceptable 'equal permeance assumption' concerning air shells, but also the relative validity of the formula (18). The Runge-Kutta method and formulae (17) and (18) give the following values for the yoke-end normalized radius respectively: 11.98; 12.04; 12.1. We must conclude that air permeance distribution is far less significant than magnetic potential difference distribution

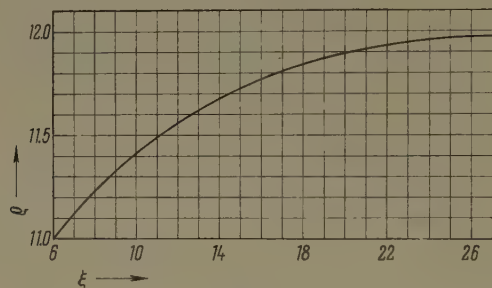


Figure 7

Polepiece profile curve as the solution of the differential equation (15) for parameters given in the text.

along the pole axis. This fact is the main justification for the usefulness of assuming circular lines of force (as was done in Section 2). Lastly by means of formulae (16) and (18) one can find the normalized height of the cone frustum (see Figure 1 and equations (6)):

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{m \kappa}{\delta} \right). \quad (19)$$

5. Optimal Design

Given a set of initial conditions, e. g. induction in the gap and the gap volume, or induction in the gap and the gap ratio ϱ_0 , one can consider the question concerning the minimal volume V of the polepiece, once the magnetic material has been chosen.

In general, we should look for the particular polepiece profile function $r = r(x)$, which will make the volume

$$V = \pi \int_{d_1}^{d_1+l} r^2 dx$$

as small as possible. This poses a very complicated problem in variation theory. Bearing in mind the lack of information concerning magnetic material, and also

for other reasons, we shall restate the optimal design problem thus: given a set of initial conditions, we must find the operating point on the demagnetization curve of the chosen magnetic material that will make the volume of the pole-piece as small as possible, provided that the design calculation follows the lines laid down in Section 4!

Consider the problem with fixed B_a , r_0 and d_0 . This implies that ϱ_0 is known. As before, we shall define the normalized polepiece volume

$$\sigma = \frac{V}{d_0^3},$$

which can be calculated from the following somewhat cumbersome formula

$$\frac{\sigma}{\pi} = \lambda \varrho_1^2 + \frac{3 \lambda}{4} m \lambda \kappa + \left(\frac{1}{4 \delta} + \frac{\lambda}{6 \varrho_1^2} \right) (m \lambda \kappa)^2 + \frac{(m \lambda \kappa)^3}{12 \varrho_1^2 \delta}. \tag{20}$$

It is interesting to note that

$$m \lambda = \frac{B_a^2}{B_m H_m}$$

according to equations (4), (11) and (12). Hence, if the product $B_m H_m$ is a maximum, the product $m \lambda$ will be a minimum. But as long as the coefficients of the polynomial (20) depend on the parameters δ , ϱ_1 , κ and λ , the minimum of σ does not necessarily coincide with minimum of $m \lambda$. Taking the fixed operating point on the demagnetization curve, i. e. m and λ as constant, we are now in a position to examine whether the minimum points of such curves as are depicted in Figure 5 coincide with the minimum of σ . Since at these points

$$\frac{d\varrho_1}{d\delta} = 0; \quad \frac{d\kappa}{d\delta} < 0,$$

we find that

$$\frac{d\sigma}{d\delta} < 0.$$

By this account the minimal value of σ becomes shifted towards a larger value of δ . Fortunately, numerical examples show that displacements of minimum points are entirely negligible.

Suppose the initial conditions B_a and ϱ_0 are given. Design procedure is then as follows:

Let us choose an operating point on the demagnetization curve for the selected magnetic material. Thus parameters m and λ are determined. Such curves as depicted in Figure 6 (if constructed for given ϱ_0) enable us to find optimal values for δ and ϱ_1 . The corresponding value of κ can then be derived from Figure 3. However, at the first approximation, parameter κ may be replaced by 1. Formula (20) now yields the normalized volume σ . By the same means we can calculate values of σ for several operating points on the demagnet-

ization curve in the neighbourhood of the $(BH)_{max}$ point, and plot the function $\sigma = \sigma(m)$. Finally, minimum of this function determines the optimal induction ratio m . As is shown in the next Section, the optimal operating point will be found close to $(BH)_{max}$ point for all practical cases. Having the optimal induction ratio m , we can find the remaining parameters of the magnet.

6. Verification and Application of the Developed Theory

Example 1. Permanent magnet installed at the University of St. Andrews, Scotland, in 1951. ANDREW and RUSHWORTH [1] have given detailed information about their permanent magnet, made from Alcomax III magnetic material. Their initial conditions would have to be $B_a = 6000$ G, $\varrho_0 = 3.7$. Reduced demagnetization curve for Alcomax III has been shown in Figure 2. At $(BH)_{max}$ point $m = 0.766$; $\lambda = 15$. Normalized volumes of the polepieces in the neighbourhood of this point were calculated and the result plotted in Figure 9. The optimal operating point is at $m = 0.76$ where $\sigma = 478\pi$. The shift of the induction ratio m being less than 0.8%, the magnetic state of the material will remain at or very near $(BH)_{max}$ point. From Figure 6 we find $\delta = 1.95$; $\varrho_1 = 4.8$, and by means of formulae (18) and (19) $\varrho_2 = 6$; $\varepsilon = 4.65$. Table 1 shows discrepancies between calculated and planned poles. Zero discrepancy of δ is interesting, whilst other discrepancies are justified mainly by reduction of demagnetization curve, which phenomenon the authors of [1] discovered after construction of their magnet.

Table 1

	δ	ϱ_1	λ	ϱ_2	ε	σ
calculated pole . . .	1.95	4.8	15	6	4.65	478π
planned pole . . .	1.95	4.44	13.7	5.55	4.57	395π
%-discrepancy with planned pole . . .	0	8.1	9.5	8.1	1.75	21

To verify derived formulae, we must use quantities obtained by measurements on the made magnet. Initial conditions then read: $B_a = 5500$ G, $\varrho_0 = 3.61$. Now we are not looking for the optimal polecap, but wish to approach as closely as possible to actual polecap dimensions. The following parameters at $(BH)_{max}$ point can be regarded as independent: $m = 0.702$; $\delta = 1.9$; $\varrho_0 = 3.61$, and these parameters with equation (9) yield the polecap slope $k_0 = 0.865$, so that $\varrho_1 = 4.39$. Equation (13) with $n = 1$, $\mu_{gr} = 1000$ gives $\lambda = 13.88$. Remaining parameters were calculated for $\kappa = 0.95$: $\varrho_2 = 5.44$ and $\varepsilon = 4.51$. Table 2 shows discrepancies between calculated and made poles.

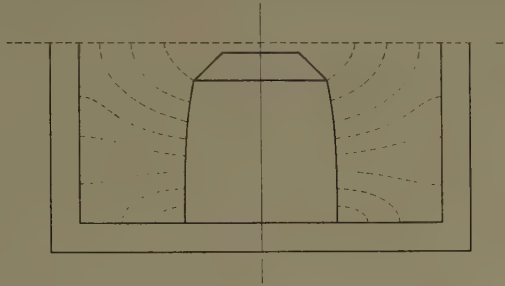


Figure 8
Influence of the yoke upon the field distribution.

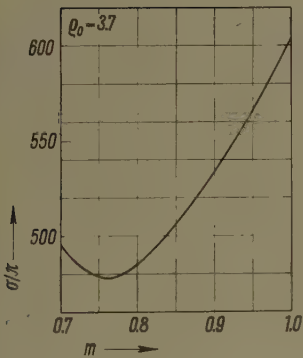


Figure 9
Plot of the function $\sigma = \sigma(m)$ giving the optimal induction ratio m for the case of Example 1.

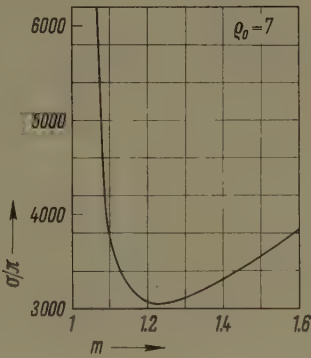


Figure 10
Plot of the function $\sigma = \sigma(m)$ giving the optimal induction ratio m for the case of Example 2.

Table 2

	q_1	λ	q_2	ε
calculated pole. . .	4.39	13.88	5.44	4.51
made pole	4.33	13.36	5.42	4.45
%-discrepancy with made pole	1.4	3.9	0.4	1.4

Except for the parameter ε , positive discrepancies are due to oversizing of the poles, made throughout the design calculation.

Example 2. The proposed magnet. A large Columax magnet is to be designed with initial conditions $B_a = 11000$ G, $q_0 = 7$.

The reduced demagnetization curve for Columax has been shown in Figure 2. At $(BH)_{max}$ point $m = 1.25$, $\lambda = 21.6$. Normalized volumes of the polepieces in the neighbourhood of this point were calculated and the result has been plotted in Figure 10. The optimal operating point is at $m = 1.225$, where $\sigma = 3060 \pi$. The shift of the induction ratio m being 2%, the $(BH)_{max}$ point is maintained. From Figure 6 we find $\delta = 7.45$; $q_1 = 11.07$ and by means of formulae (18) and (19) $q_2 = 12.14$; $\varepsilon = 9.2$. The University of Leeds Columax magnet has the gap length $2d_0 = 1.4''$, volume of the polepiece something about 41.1 dm^3 , and initial conditions $B_a = 9500 \text{ G}$, $q_0 = 7.15$. With our initial conditions and the above gap length, the proposed magnet would have a volume of about 54.2 dm^3 , 32% larger than the University of Leeds magnet.

7. Conclusion

From the preceding two examples it is possible to derive an interesting plausible law: if the induction in the air gap is to be increased for x % with respect to an already constructed magnet, the volume of magnetic material would be increased roughly by $2x$ %, provided that the gap ratio remains unaltered and that magnets are of optimal dimensions.

As has been frequently emphasized, this method of calculation leads to oversizing of the magnet. This can be turned to good account, for it is well known that after magnetization permanent magnets are usually stabilized by means of a certain demagnetizing field.

At all events, acceptability of the developed method will be established only after numerous applications.

Acknowledgements

The author wishes to express his gratitude to Dipl. Ing. Dr. SINIŠA MARIČIĆ and Dipl. Ing. VELJKO RADEKA, both from the Institute 'Rudjer Bošković', Zagreb, for putting at his disposal all the interesting papers and data they possess on large permanent magnets.

REFERENCES

- [1] E. R. ANDREW, and F. A. RUSHWORTH, *Electro-J.* 155, 1334 (1955).
- [2] J. E. COUSINS, and W. F. NASH, *Brit. J. appl. Phys.* 10, 471 (1959).
- [3] MIT, *Magnetic Circuits and Transformers* (John Wiley, 8th print., 1952).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Methode zur Berechnung von grossen Permanentmagneten mit rotationssymmetrischen Polen entwickelt. Zum Unterschied von der klassischen Methode, die die Hopkinsonschen Streufaktoren benutzt, gibt diese Methode einen besseren Einblick in die geometrischen Verhältnisse, und führt zu einfachen Formeln für die Berechnung der Magnetpoldimensionen.

Die wesentlichen Resultate sind:

1. Bei gegebenen Luftspaltdimensionen und gegebener Luftspaltinduktion bestehen bei vorgezeichnetem Magnetmaterial optimale Polhorndimensionen.
2. Die Verteilung des magnetischen Skalarpotentials längs der Magnetpolachse ist weit wichtiger als die Magnetfeldverteilung in der Luft.
3. Der günstigste Betriebspunkt auf der Entmagnetisierungskurve ist gegenüber dem Punkt $(BH)_{max}$ nur für wenige Prozente nach grösseren Werten von B verschoben.

(Received: April 20, 1960.)

Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines elastisch-plastischen Körpers und seinem Fließgesetz

VON HANS ZIEGLER, ETH, Zürich

1. Einleitung

Die von v. MISES [1]¹⁾ aufgestellte Theorie des plastischen Potentials kann in der von PRAGER [2] verallgemeinerten Gestalt etwa wie folgt formuliert werden:

Es seien q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) die verallgemeinerten Verformungen des elastisch-plastischen Körpers, das heisst also ein Satz von Lagekoordinaten, welcher seine Deformation mit der gewünschten Genauigkeit beschreibt. Ihre elastischen und plastischen Anteile seien mit q_k^e bzw. q_k^p bezeichnet. Ferner sei (unter Verwendung der bekannten Summationsregel)

$$dA = Q_k dq_k \quad (1.1)$$

die elementare Deformationsarbeit. Dann kann man die Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) als verallgemeinerte Kräfte bzw. nach PRAGER als verallgemeinerte Spannungen bezeichnen. Sowohl der Verformungs- wie der Spannungszustand lassen sich durch Punkte mit den Fahrstrahlen q bzw. Q im n -dimensionalen euklidischen Spannungsraum R_n darstellen. Definiert man hier zum Zwecke der Metrisierung das Skalarprodukt zweier Vektoren mit

$$Q \cdot q = Q_k q_k, \quad (1.2)$$

so ist die elementare Deformationsarbeit (1.1) durch

$$dA = Q \cdot dq \quad (1.3)$$

gegeben. Es entspricht dann jedem verallgemeinerten Verformungs- bzw.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 68.

Spannungszustand q_k bzw. Q_k ein Vektor q bzw. Q oder, wie wir im folgenden auch sagen werden, ein Punkt q bzw. Q in R_n und umgekehrt.

Betrachtet man den Körper in einem gegebenen Stadium des Verformungsprozesses, so lassen sich vom momentanen Spannungszustand aus gewisse andere ohne plastischen Fluss realisieren. Diese sollen als *aplastische Spannungszustände* und die Gesamtheit ihrer Bildpunkte in R_n als *aplastischer Bereich* \bar{R}_n bezeichnet werden. Ferner sei unter einem *aplastischen Spannungsinkrement* dQ^* ein solches verstanden, das zwei benachbarte apostatische Spannungszustände Q und Q' ineinander überführt. Die *Fliessgrenze*, eine Hyperfläche in R_n , wird dann als Oberfläche des apostatischen Bereiches durch diejenigen apostatischen Punkte Q gebildet, für die nicht jedes hinreichend kleine Spannungsinkrement dQ apostatisch ist. Liegen die benachbarten Punkte Q und Q' an der Fliessgrenze, dann nennt man das apostatische Spannungsinkrement dQ^* neutral. Liegt von den beiden Punkten genau einer an der Fliessgrenze, so stellt dQ^* eine Entlastung bzw. Belastung dar.

Der Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand Q und dem elastischen Verformungszustand q^e wird wie in der Elastizitätstheorie angenommen. Für die im apostatischen Bereich \bar{R}_n , aber nicht an der Fliessgrenze liegenden Spannungspunkte ist das plastische Verformungsinkrement dq^p null. Für die Punkte an der Fliessgrenze kann es gleich oder ungleich null sein. Bezüglich seiner Richtung gelten folgende Sätze:

Satz 1: Mit Q' und Q'' ist auch jeder Spannungszustand

$$Q = Q' + a(Q'' - Q'), \quad (0 < a < 1) \quad (1.4)$$

aplastisch. Mit anderen Worten: Mit zwei beliebigen Punkten Q' und Q'' liegt auch ihre ganze Verbindungsstrecke im apostatischen Bereich, das heisst der apostatische Bereich ist konvex.

Satz 2: Ist Q ein Spannungszustand an der Fliessgrenze und dQ^* ein beliebiges apostatisches Spannungsinkrement, das vom wirklichen Spannungsinkrement dQ völlig unabhängig ist, so gilt

$$dQ^* \cdot dq^p \leq 0. \quad (1.5)$$

Mit anderen Worten: Die Normalprojektion des plastischen Verformungsinkrements auf jedes mit dem wirklichen Spannungszustand verträgliche apostatische Spannungsinkrement ist nichtpositiv.

Satz 3: Für das wirkliche Spannungsinkrement dQ gilt

$$dQ \cdot dq^p \geq 0. \quad (1.6)$$

Das heisst: Die Normalprojektion des plastischen Verformungsinkrements auf das wirkliche Spannungsinkrement ist nichtnegativ.

2. Problemstellung

R. v. MISES hat den durch die Sätze 1 bis 3 beschriebenen Sachverhalt ausdrücklich als Hypothese und zudem unter Beschränkung auf ein Raumelement ausgesprochen, indem er als Verformungen q_k und Spannungen Q_k die lokalen Verzerrungskomponenten ε_{ij} und die Spannungskomponenten σ_{ij} benützte. Es ist das Verdienst von PRAGER, die Theorie im Sinne von Abschnitt 1 verallgemeinert zu haben. Ihre Begründung ist auf verschiedenen Wegen durch BISHOP und HILL [2a], DRUCKER [3] und den Verfasser [4] versucht worden, vermag aber insofern vielleicht nicht restlos zu befriedigen, als in allen Fällen gewisse physikalische Postulate benutzt werden mussten. Der Verfasser hat sich daher neuerdings die Aufgabe gestellt, unter Verzicht auf alle physikalischen Annahmen wenigstens in aller Strenge nachzuweisen, dass aus der Voraussetzung, die Sätze 1 bis 3 seien in der v. Misesschen Fassung, das heisst für das Raumelement richtig, auch ihre Gültigkeit in der Pragerschen Verallgemeinerung, das heisst im Sinne von Abschnitt 1 folgt.

Obschon die Theorie meist für elastisch-plastische Körper formuliert zu werden pflegt, beschränkt man sich bei ihrer Anwendung gewöhnlich auf den einfacheren *starr-plastischen* Körper, der durch die Bedingung $q^e = 0$ bzw. $q = q^p$ definiert wird. Für diesen Körper ist der erwähnte Nachweis in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit [5], an die sich die folgenden Ausführungen anschliessen, erbracht worden. Hier handelt es sich darum, den Beweis auf *elastisch-plastische* Körper zu übertragen. Das ist unter der Voraussetzung möglich, dass die Aufspaltung des Verformungszustandes q in die Anteile q^e und q^p in geeigneter Weise vorgenommen wird. Freilich ist das Problem damit noch nicht so weit vereinfacht wie im Falle des starr-plastischen Körpers, da sich im allgemeinen mit fortschreitendem plastischem Fluss der aplastische Bereich auch bei elastisch-idealplastischem Material verformt und damit ein ähnliches Verhalten zeigt wie bei der Verfestigung eines starr-plastischen Körpers.

Die Verformungen werden im folgenden einfachheitshalber als klein und der Zusammenhang zwischen ihren elastischen Anteilen sowie den Spannungen als linear angenommen.

3. Verformungen und Spannungen

An einem Element des betrachteten Körpers sind der Verformungs- und der Spannungszustand durch die Verzerrungskomponenten ε_{ij} bzw. die Spannungskomponenten σ_{ij} gegeben; sie lassen sich durch je einen Vektor e bzw. s im n -dimensionalen euklidischen Spannungsraum R_9 darstellen. Definiert man hier das Skalarprodukt mit

$$s \cdot e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3.1)$$

so ist die elementare Deformationsarbeit je Raumeinheit durch

$$d\bar{A} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \mathbf{s} \cdot d\mathbf{e} \quad (3.2)$$

gegeben. Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Tensoren ϵ_{ij} und σ_{ij} liegen die Vektoren \mathbf{e} und \mathbf{s} in Wirklichkeit in einem sechsdimensionalen linearen Unterraum R_6 von R_9 . Hier entspricht jedem Verzerrungs- bzw. Spannungszustand ϵ_{ij} bzw. σ_{ij} ein Vektor \mathbf{e} bzw. \mathbf{s} und umgekehrt, und der aplastische Bereich wird wie in Abschnitt 1 definiert. Er kann sich ins Unendliche erstrecken; so schliesst man ja gewöhnlich plastischen Fluss unter einem hydrostatischen Spannungszustand aus.

Der Verformungs- und der Spannungszustand des *ganzen Körpers* werden durch die von den Koordinaten x_i abhängigen Funktionen ϵ_{ij} bzw. σ_{ij} dargestellt, und diese lassen sich, wie SYNGE [6] und andere Autoren gezeigt haben, als Vektoren \mathbf{E} bzw. \mathbf{S} im Funktionenraum F interpretieren. Da die elementare Deformationsarbeit durch das über den ganzen Körper K erstreckte Raumintegral

$$dA = \int_K \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dv \quad (3.3)$$

gegeben ist, empfiehlt es sich, für die Metrisierung des Funktionenraums das Skalarprodukt durch

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_K \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv \quad (3.4)$$

zu definieren. Wie in [5] gezeigt wurde, ist diese Definition zulässig; sie ergibt eine positiv definite Metrik sowie für die elementare Deformationsarbeit (3.3) die Darstellung

$$dA = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Jedem Verformungs- bzw. Spannungszustand im Körper K entspricht ein Vektor im Funktionenraum. Dabei beschränkt sich diese Darstellung keineswegs auf kinematisch zulässige Verformungs- und statisch zulässige Spannungszustände; vielmehr sollen vorderhand alle denkbaren Zustände zugelassen sein, für welche die Integrale (3.3) bzw. (3.4) existieren. Der aplastische Bereich \bar{F} kann sich auch hier ins Unendliche erstrecken. Lässt man die Belastung des Körpers K von Null an wachsen, dann durchwandert der Bildpunkt \mathbf{S} des wirklichen Spannungszustandes zunächst den aplastischen Bereich und erreicht die Fließgrenze im Augenblick, in dem die ersten Elemente von K plastisch werden. Mit weiter zunehmender Belastung setzt in einer sich allmählich erweiternden Umgebung dieser Elemente plastischer Fluss ein, und es kann gegebenenfalls zum Kollaps kommen, ohne dass aber der ganze Körper

plastisch zu werden braucht. Ein wesentlicher Unterschied zum starr-plastischen Körper besteht darin, dass hier der plastische Fluss lokal einsetzen kann, sobald die ersten Elemente an ihrer Fließgrenze angelangt sind, während dort die starre Umgebung des plastifizierten Gebietes den lokalen Fluss verhindert und plastische Verformungen erst auftreten, wenn ein genügend grosser Teilbereich von K plastifiziert ist. Hieraus folgt für die Darstellung im Funktionenraum

Satz 4: Der aplastische Bereich des ganzen elastisch-plastischen Körpers deckt sich im allgemeinen nicht mit demjenigen des entsprechenden, lokal der gleichen Fließbedingung unterworfenen starr-plastischen Körpers.

Insbesondere sieht man ohne weiteres ein, dass der aplastische Bereich des jungfräulichen elastisch-plastischen Körpers in demjenigen des entsprechenden starr-plastischen Körpers enthalten ist. Aus der Möglichkeit des lokalen Flusses ergibt sich beiläufig auch eine Aussage für den idealplastischen, das heisst den Körper ohne Verfestigung, dass nämlich im elastisch-idealplastischen im Unterschied zum starr-idealplastischen Körper Spannungszustände realisierbar sind, deren Bildpunkte ausserhalb der ursprünglichen Fließgrenze liegen. Somit hat man

Satz 5: Im Gegensatz zum aplastischen Bereich des starr-idealplastischen Körpers ist derjenige des elastisch-idealplastischen Körpers nicht fest, sondern ändert sich im allgemeinen, während die Belastung bis zum Kollaps gesteigert wird.

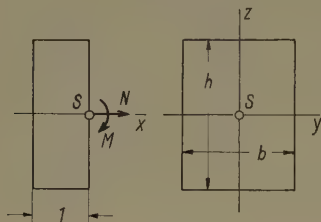
Der elastisch-idealplastische Körper verhält sich also mit zunehmender Ausdehnung des plastifizierten Gebietes ähnlich wie der starr-plastische Körper bei der Verfestigung.

Der Übergang zu *verallgemeinerten Verformungen und Spannungen* wird stets dadurch vollzogen, dass man sich auf die Betrachtung von speziellen Verformungszuständen beschränkt, die durch eine endliche Zahl n von Parametern q_k beschrieben werden können. Man kann sich diese Restriktion in der Weise durchgeführt denken, dass man geeignete Bindungen einführt (und allenfalls auch vorhandene Bindungen löst), derart, dass sich der Freiheitsgrad des Körpers (von einer allfälligen starren Bewegung abgesehen) auf n reduziert. Es ist klar, dass dieser Prozess einen groben Eingriff darstellt, der nur dann zu verantworten ist, wenn er das wirkliche Verhalten des Körpers in der gegebenen Situation nicht zu stark modifiziert, der aber unter dieser Voraussetzung das Problem wesentlich vereinfacht.

4. Beispiel

Es sei ein Balken mit rechteckigem Querschnitt unter Beanspruchung auf Zug sowie spezielle Biegung betrachtet und hievon in Figur 1 eine Scheibe der Dicke 1 ins Auge gefasst. Der Verformungs- und der Spannungszustand

dieser Scheibe werden, falls man die Längeneinheit hinreichend klein gewählt hat, durch je sechs von y und z abhängige Verzerrungs- bzw. Spannungskomponenten beschrieben. Man kann aber das Problem im Sinne der Festigkeitslehre durch die Annahmen vereinfachen, dass die Querschnitte bei der Deformation in erster Näherung eben bleiben und dass sich die Längsfasern nicht wesentlich beeinflussen. Das heisst, man kann sich vorstellen, dass der Zusammenhang zwischen den Längsfasern gelöst (der Spannungszustand mithin linear) und die Bewegung jedes Querschnittes diejenige einer starren Fläche sei. Wie Figur 2 zeigt, wird die Verformung der Scheibe in dieser Näherung



Figur 1

Balkenelement unter Beanspruchung auf Zug und Biegung.



Figur 2

Verformung des Elements.

durch die Dehnung ε sowie die Krümmung der elastischen Linie, nämlich den Winkel κ zwischen den beiden Stirnflächen beschrieben, und dabei gilt

$$\varepsilon = r \kappa. \quad (4.1)$$

Die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen sind die Normalkraft N sowie das Biegemoment M , da die elementare Deformationsarbeit durch

$$dA = N d\varepsilon + M d\kappa$$

gegeben ist.

Um den ursprünglichen aplastischen Bereich der von jetzt an als elastisch-idealplastisch angenommenen Scheibe zu erhalten, hat man die Spannungszustände zu diskutieren, die an der Fließgrenze liegen. Für den in Figur 3 dargestellten Fall, bei dem die Fließgrenze σ_0 in den obersten Fasern auf Zug erreicht wird, ist die Spannungsverteilung durch

$$\sigma = \frac{r+z}{r+h/2} \sigma_0 \quad (4.2)$$

gegeben, die Normalkraft also durch

$$N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz = \frac{b h r}{r + h/2} \sigma_0 \quad (4.3)$$

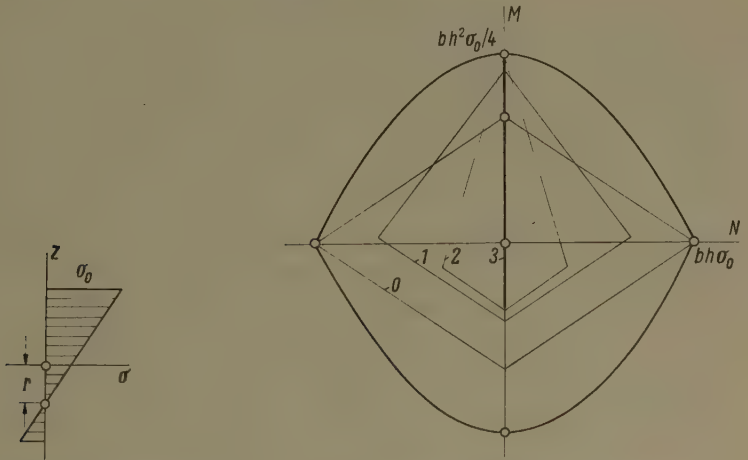
und das Biegemoment durch

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z \, dz = \frac{b h^3}{12 (r + h/2)} \sigma_0. \tag{4.4}$$

Wenn man aus (4.3) sowie (4.4) r eliminiert und die Fälle hinzunimmt, in denen die Fließgrenze auf Druck bzw. am unteren Querschnittsrand erreicht wird, erhält man die Grenzen

$$M = \pm \frac{h}{6} (b h \sigma_0 \mp N) \tag{4.5}$$

eines Parallelogramms, das in Figur 4 mit 0 bezeichnet ist und innerhalb des von PRAGER (vgl. [2], S. 46) gegebenen, durch zwei Parabeln begrenzten aplastischen Bereiches für starr-idealplastisches Material liegt.



Figur 3

Spannungsverteilung bei Erreichen der Fließgrenze am oberen Rand.

Figur 4

Sukzessive Fließgrenzen des plastisch gebogenen Elements.

Beansprucht man jetzt die Scheibe in reiner Biegung durch ein positives Moment M_1 über die Fließgrenze hinaus, so ergibt sich durch Anwendung der Integrale (4.3) sowie (4.4) auf die Spannungsverteilung von Figur 5 der Zusammenhang

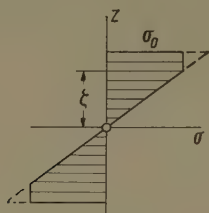
$$M_1 = \frac{b}{12} (3 h^2 - 4 \zeta^2) \sigma_0 \tag{4.6}$$

zwischen der halben Höhe ζ des elastischen Kerns und dem Biegemoment M_1 . Bei elastischem Verhalten wäre das Biegemoment für gleiche Deformation

$$M'_1 = \frac{b h^3}{12 \zeta} \sigma_0; \tag{4.7}$$

der plastische Fluss in den äusseren Fasern bedeutet einen Spannungsabfall gegenüber der elastischen Lösung, und diesem entspricht eine Reduktion des Biegemomentes um

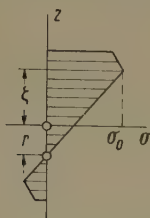
$$\Delta M = M'_1 - M_1 = \frac{b}{12 \zeta} (h^3 - 3 h^2 \zeta + 4 \zeta^3) \sigma_0. \quad (4.8)$$



Figur 5

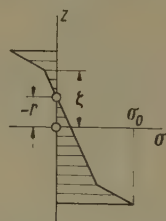
Spannungsverteilung unter plastischer Biegung.

Um den neuen aplastischen Bereich der durch M_1 auf Biegung vorbeanspruchten und dadurch einer ersten plastischen Verformung unterzogenen Scheibe zu erhalten, hat man jetzt Spannungszustände zu betrachten, die sich für $|z| > |\zeta|$ durch den gleichen marginalen Spannungsabfall von der linearen unterscheiden wie in Figur 5. Unter diesen sind wiederum diejenigen zu diskutieren, die wie die Spannungszustände mit $\sigma(\zeta) = \sigma_0$ bzw. $\sigma(-h/2) = \sigma_0$ von Figur 6 und 7 an der Fließgrenze liegen. Dabei kann man



Figur 6

Spannungsverteilung des plastisch gebogenen Elements für $\sigma(\zeta) = \sigma_0$.



Figur 7

Spannungsverteilung des plastisch gebogenen Elements für $\sigma(-h/2) = \sigma_0$.

die Integrale (4.3) und (4.4) auf die elastischen Verteilungen anwenden und hat nur nachträglich das Biegemoment um den Betrag (4.8) zu reduzieren. Im Fall von Figur 6 ergibt sich so, wenn man von der Spannungsverteilung

$$\sigma = \frac{r+z}{r+\zeta} \sigma_0 \quad (4.9)$$

ausgeht,

$$N = \frac{b h r}{r+\zeta} \sigma_0 \quad \text{und} \quad M = \frac{b h^3}{12 (r+\zeta)} \sigma_0 - \Delta M, \quad (4.10)$$

im Fall von Figur 7 mit

$$\sigma = \frac{2\zeta - h/2}{\zeta(r - h/2)} (r + z) \sigma_0 \quad (4.11)$$

analog

$$N = b h r \frac{2\zeta - h/2}{\zeta(r - h/2)} \sigma_0 \quad \text{sowie} \quad M = \frac{b h^3}{12} \frac{2\zeta - h/2}{\zeta(r - h/2)} \sigma_0 - \Delta M. \quad (4.12)$$

Durch Elimination von r aus (4.10) bzw. (4.12), Hinzunahme der Fälle $\sigma(-\zeta) = -\sigma_0$, $\sigma(h/2) = -\sigma_0$ und Berücksichtigung von (4.8) erhält man schliesslich die Grenzen

$$M \pm \frac{h^2}{12\zeta} N = M_1 \quad (4.13)$$

sowie

$$M \mp \frac{h}{6} N = M_1 - \frac{b h^2}{3} \sigma_0 \quad (4.14)$$

des neuen aplastischen Bereiches, der wiederum die Form eines (bezüglich der Achse M symmetrischen) Vierecks besitzt. Er ist in Figur 4 für $\zeta = h/4$ bzw. $\zeta = h/10$ eingetragen und mit 1 bzw. 2 bezeichnet; ferner ist leicht einzusehen, dass er sich für $\zeta \rightarrow 0$ auf die Teilstrecke 3

$$-\frac{b h^2}{12} \sigma_0 \leq M \leq \frac{b h^2}{4} \sigma_0 \quad (4.15)$$

der Achse M zusammenzieht.

Wie zu erwarten war, folgt aus diesem Beispiel

Satz 6: Die Sätze 4 und 5 gelten nicht nur für die wirklichen, sondern auch für die verallgemeinerten Spannungen des endlichen Körpers.

Figur 4 zeigt deutlich den Unterschied, der zwischen den aplastischen Bereichen des elastisch-plastischen und des starr-plastischen Körpers besteht. Freilich behält wenigstens für den elastisch-idealplastischen Körper der aplastische Bereich des starr-idealplastischen Körpers seine Bedeutung insofern, als auch hier mit dem Kollaps zu rechnen ist, sobald der Spannungspunkt seine Grenze erreicht.

5. Elastische und plastische Verformungen

Für die Theorie des plastischen Potentials ist die Art der Aufspaltung des Verformungszustandes in seinen elastischen und den plastischen Anteil von grundlegender Bedeutung. Hier liegt ein Problem, das in der Literatur meist übergangen, tatsächlich aber nicht ganz trivial ist.

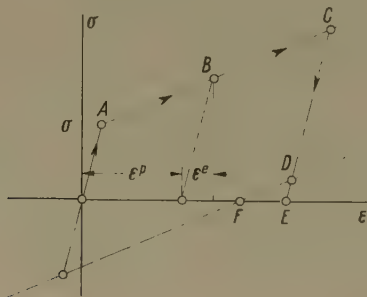
Beim *Raumelement* pflegt man, vom linearen Spannungszustand mit dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Abbildung 8 ausgehend, denjenigen Anteil ε_{ij}^e des Verzerrungszustandes ε_{ij} als elastisch zu bezeichnen, der dem Spannungszustand σ_{ij} unter der Annahme rein elastischen Verhaltens, das heisst

nach dem Hookeschen Gesetz entspricht; der plastische Verzerrungszustand ist dann durch die Differenz $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e$ definiert. Im ursprünglichen aplastischen Bereich gilt $\varepsilon_{ij}^p = 0$ bzw. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e$; ferner sind die ε_{ij}^e diejenigen Verzerrungen, die sich bei der Entlastung zurückbilden, während die ε_{ij}^p bestehen bleiben, und schliesslich stellt im Ausdruck (3.2) für die elementare Deformationsarbeit je Raumeinheit, der jetzt mit

$$d\bar{A} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (5.1)$$

angeschrieben werden kann, der erste Term rechterhand die Zunahme der elastischen Verzerrungsenergie und der zweite die elementare, in Wärme übergeführte Dissipationsarbeit dar.

Es sei nur nebenbei vermerkt, dass die zuletzt genannten Eigenschaften nicht ohne weiteres aus der vorstehenden Definition der Aufspaltung folgen. So muss man, um ihre Äquivalenz auch bei grösseren Verzerrungen zu erhalten, für die Entlastung etwa vom Punkt *C* in Figur 8 den Weg des Bildpunktes mit *CDE* und nicht mit *CDF*, den Bauschinger Effekt mithin als beschränkt annehmen. Um die Schwierigkeiten zu vermeiden, die sich alsdann bei einer Belastungsumkehr ergeben, berufen wir uns auf die bereits am Schluss von Abschnitt 2 eingeführte Voraussetzung kleiner Deformationen.



Figur 8

Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines elastisch-plastischen Materials mit Verfestigung.

Für den *ganzen Körper* geht man zweckmässig vom Spannungszustand *S* aus und spaltet unter Benützung der zugehörigen Spannungskomponenten σ_{ij} in jedem Punkt den Verzerrungszustand ε_{ij} in der eben besprochenen Weise auf. Damit hat man im ursprünglichen aplastischen Bereich wieder $\mathbf{E}^p = 0$ bzw. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e$. Nach dem Einsetzen der plastischen Verformung stimmt aber der Spannungszustand *S* im allgemeinen nicht mehr mit demjenigen *S** überein, der in *K* für die gegebene Lagerung und Belastung bei rein elastischem Verhalten zu erwarten wäre. Bei der Entlastung bildet sich *S* im Gegensatz zu *S**

im allgemeinen nicht zurück; die Verformungen \mathbf{E}^e und \mathbf{E}^p lassen sich also nicht als diejenigen Anteile des Verformungszustandes deuten, die bei der Entlastung von K verschwinden bzw. zurückbleiben. Dafür folgt aber bei dieser Art der Aufspaltung aus (3.3) und (3.5) die elementare Deformationsarbeit

$$dA = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E}^e + \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E}^p, \quad (5.2)$$

und zwar stellt nach (5.1) der erste Term rechterhand die Zunahme der elastischen Deformationsenergie und der zweite die elementare Dissipationsarbeit dar.

Wie am Schluss von Abschnitt 3 ausgeführt wurde, wird der Übergang auf *verallgemeinerte Verformungen und Spannungen* durch Beschränkung auf Verformungszustände vollzogen, die sich durch Überlagerung aus n speziellen Zuständen gewinnen lassen. Im Funktionenraum bedeutet dies (vgl. [5]) stets die Restriktion auf einen linearen Unterraum F_n , der den Ursprung enthält und durch eine orthonormale Basis \mathbf{I}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) dargestellt werden kann, so dass

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}_k) \mathbf{I}_k \quad (5.3)$$

ist. Die zugehörigen Spannungszustände werden im allgemeinen nicht durch Vektoren \mathbf{S} aus F_n dargestellt. Indessen kann ein beliebiger Spannungszustand \mathbf{S} gemäss

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \mathbf{S}_0, \quad \mathbf{S}' = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}_k) \mathbf{I}_k \quad (5.4)$$

in seine Normalprojektion \mathbf{S}' auf F_n und einen zu F_n orthogonalen Vektor \mathbf{S}_0 zerlegt werden. Nach (3.5), (5.3) und (5.4) ist dann die elementare Deformationsarbeit durch

$$dA = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}_k) (d\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}_k) = \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{E} \quad (5.5)$$

gegeben. Auf der Möglichkeit, diese Arbeit als Skalarprodukt zweier Vektoren im linearen Unterraum F_n darzustellen, beruht beim starr-plastischen Körper ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^p$) die Übertragung der Sätze 1 bis 3 vom Element auf verallgemeinerte Verformungen und Spannungen.

Für die Aufspaltung des Verformungszustandes kann man auch hier – diesmal unter Beschränkung auf Verformungszustände \mathbf{E} in F_n – vom Spannungszustand \mathbf{S} ausgehen und unter Benützung der Spannungskomponenten σ_{ij} den Verzerrungszustand ϵ_{ij} in jedem Punkt in seinen elastischen bzw. plastischen Anteil auflösen. Da aber mit dem Verformungszustand \mathbf{E} seine Anteile \mathbf{E}^e und \mathbf{E}^p nicht notwendig im linearen Unterraum F_n liegen, ist die Behandlung in verallgemeinerten Grössen auf dieser Basis im allgemeinen nicht möglich. Vielmehr empfiehlt sich, von den verallgemeinerten Verformungen \mathbf{q} und den zugehörigen verallgemeinerten Spannungen \mathbf{Q} auszugehen und die Zerlegung

auf Grund der Forderung vorzunehmen, dass in dem aus (1.3) folgenden Ausdruck

$$dA = Q \cdot dq^e + Q \cdot dq^p \quad (5.6)$$

für die elementare Deformationsarbeit der erste Term rechterhand die Zunahme der elastischen Deformationsenergie und der zweite die elementare Dissipationsarbeit darstellen soll²⁾. Wie der Vergleich mit (5.2) zeigt, ist dann

$$Q \cdot dq^e = S \cdot dE^e = dU, \quad (5.7)$$

wobei U die elastische Deformationsenergie darstellt, sowie

$$Q \cdot dq^p = S \cdot dE^p, \quad (5.8)$$

und q^e kann als derjenige verallgemeinerte Verformungszustand interpretiert werden, der dem verallgemeinerten Spannungszustand Q bei rein elastischem Verhalten entsprechen würde.

6. Beispiel

Bei der in Figur 1 wiedergegebenen, auf Zug und Biegung beanspruchten Scheibe ist die Behandlung der Querschnitte als starre Flächen mit der Beschränkung auf Verformungszustände in einem zweidimensionalen Unterraum F_2 von F gleichbedeutend. Diese sind insbesondere durch eine lineare Verteilung der axialen Dehnung ε_x über den Querschnitt charakterisiert und lassen sich durch die beiden Parameter ε sowie κ darstellen. Die zugehörigen Spannungszustände (vgl. Figur 5 bis 7) weisen im allgemeinen diesen linearen Verlauf nicht auf und gehören somit dem Unterraum F_2 nicht an.

Geht man von einer dieser Spannungsverteilungen $\sigma_x(z)$ aus, und ermittelt man mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes für jeden Wert von z die elastische Dehnung $\varepsilon_x^e(z)$, so zeigt sich ohne weiteres, dass diese sowie die plastische Dehnung $\varepsilon_x^p(z)$ mit der totalen $\varepsilon_x(z)$ im allgemeinen nicht linear in z ist. Demnach ist die Behandlung des Problems im linearen Unterraum F_2 auf dieser Basis ausgeschlossen. Dagegen kann man die elastischen Anteile der verallgemeinerten Verformungen durch die der Elastizitätstheorie entnommenen Beziehungen

$$\varepsilon^e = \frac{N}{E b h}, \quad \kappa^e = \frac{12 M}{E b h^3} \quad (6.1)$$

definieren und erhält hieraus die plastischen Anteile $\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e$, $\kappa^p = \kappa - \kappa^e$. Die lokale elastische Dehnung ist dann

$$\varepsilon_x^e(z) = \frac{N}{E b h} + \frac{12 M}{E b h^3} z, \quad (6.2)$$

²⁾ Das ist die vom Verfasser bereits in [4] verwendete Definition.

und die elastische Deformationsenergie berechnet sich hieraus erwartungsgemäss zu

$$U = \frac{E}{2} b \int_{-\hbar/2}^{\hbar/2} [e_x^e(z)]^2 dz = \frac{N^2}{2 E b \hbar} + \frac{12 M^2}{2 E b \hbar^3}. \quad (6.3)$$

7. Der ganze Körper

Es sei jetzt angenommen, dass Satz 1 zwar für jedes Element des Körpers K , aber nicht für den ganzen Spannungszustand in K gelte. Dann gibt es zwei aplastische Spannungszustände S' und S'' sowie einen Wert a so, dass der Spannungszustand

$$S = S' + a (S'' - S'), \quad (0 < a < 1) \quad (7.1)$$

nicht aplastisch ist. Das ist aber nur möglich, wenn in wenigstens einem Element von K die Fließgrenze überschritten, also hier im Widerspruch mit der eben getroffenen Voraussetzung mit σ'_{ij} und σ''_{ij} der Spannungszustand

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + a (\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij}), \quad (0 < a < 1) \quad (7.2)$$

nicht aplastisch ist.

Ebenso einfach ist der Nachweis, dass für einen Spannungszustand S an der Fließgrenze, ein beliebiges aplastisches Spannungsinkrement dS^* und das wirkliche plastische Verformungsinkrement dE^p die Ungleichung

$$dS^* \cdot dE^p \leq 0 \quad (7.3)$$

bzw. nach (3.4)

$$\int_K d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^p dv \leq 0 \quad (7.4)$$

besteht, falls für jedes Element von K Satz 2 richtig ist. Man kann nämlich diese Elemente in zwei Gruppen einteilen, je nachdem sie unter dem wirklichen Spannungsinkrement dS plastisch fließen oder nicht. Für die Elemente der zweiten Gruppe ist $d\varepsilon_{ij}^p = 0$; sie liefern also keine Beiträge zum Integral (7.4). Für diejenigen der ersten Gruppe gilt nach Satz 2

$$d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^p \leq 0; \quad (7.5)$$

ihre Beiträge zu (7.4) sind demnach nichtpositiv.

Schliesslich folgt aus der Gültigkeit von Satz 3 für jedes Element von K , dass für das wirkliche Spannungsinkrement dS die Ungleichung

$$dS \cdot dE^p \geq 0 \quad (7.6)$$

bzw.

$$\int_K d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p dv \geq 0 \quad (7.7)$$

besteht. Die unter dS nicht fliessenden Elemente leisten nämlich keinen, die übrigen nach Satz 3 nichtnegative Beiträge

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (7.8)$$

zum Integral (7.7).

Somit hat man

Satz 7: Gelten die Sätze 1 bis 3 für das Raumelement, dann sind sie auch für die Darstellung des ganzen Verformungs- und Spannungszustandes im Funktionenraum richtig.

8. Verallgemeinerte Grössen

Beim Übergang auf verallgemeinerte Verformungen und Spannungen ist zu beachten, dass sich ein bestimmter verallgemeinerter Spannungszustand Q durch unendlich viele wirkliche Spannungszustände in K realisieren lässt, so dass der Punkt Q in R_n unendlich vielen Punkten S in F entsprechen kann.

In einem beliebigen Stadium des Verformungsprozesses führt das verallgemeinerte aplastische Spannungsinkrement dQ^* nach Abschnitt 1 zwei aplastische Spannungszustände ineinander über und ist daher in R_n Abbild eines aplastischen Spannungsinkrements dS^* in F . Ferner liegt mit Q auch der wirkliche Spannungszustand S an der Fliessgrenze, und nach (5.8) sowie (7.3) gilt, wenn dq^p bzw. dE^p das wirkliche plastische Verformungsinkrement darstellt,

$$dQ^* \cdot dq^p = dS^* \cdot dE^p \leq 0, \quad (8.1)$$

das heisst (1.5). Analog ergibt sich für das wirkliche Spannungsinkrement dQ bzw. dS

$$dQ \cdot dq^p = dS \cdot dE^p \geq 0, \quad (8.2)$$

somit (1.6).

Sind ferner Q' und Q'' in R_n zwei verallgemeinerte aplastische Spannungszustände und S' sowie S'' zwei ihnen entsprechende aplastische Zustände in F , so folgt daraus, dass die Spannungszustände (7.1) aplastisch sind, auch die Aplastizität der entsprechenden verallgemeinerten Spannungszustände Q . Stellen dq in R_n und dE in F_n dasselbe verallgemeinerte Verformungsinkrement dar, dann gilt nach (1.3) und (3.5)

$$dA = Q \cdot dq = S \cdot dE, \quad (8.3)$$

und gemäss Definition der verallgemeinerten Spannungen ergibt sich umge-

kehrt aus dem Bestehen einer für jedes Paar $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{E}$ gültigen Identität von dieser Form, dass \mathbf{Q} der zu \mathbf{S} gehörende verallgemeinerte Spannungszustand ist. Nun folgt aus (8.3) für beliebige Paare $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{E}$

$$\mathbf{Q}' \cdot d\mathbf{q} = \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{E} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{Q}'' \cdot d\mathbf{q} = \mathbf{S}'' \cdot d\mathbf{E} \quad (8.4)$$

und damit auch

$$[\mathbf{Q}' + a(\mathbf{Q}'' - \mathbf{Q}')] \cdot d\mathbf{q} = [\mathbf{S}' + a(\mathbf{S}'' - \mathbf{S}')] \cdot d\mathbf{E}. \quad (8.5)$$

Den Spannungszuständen \mathbf{S} aus (7.1) entsprechen mithin die verallgemeinerten Spannungszustände

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' + a(\mathbf{Q}'' - \mathbf{Q}'), \quad (0 < a < 1) \quad (8.6)$$

und daher ist mit \mathbf{Q}' und \mathbf{Q}'' auch jeder verallgemeinerte Spannungszustand (1.4) aplastisch.

Demnach hat man jetzt auch

Satz 8: Gelten die Sätze 1 bis 3 für das Raumelement, dann sind sie auch für die Behandlung des ganzen Körpers in verallgemeinerten Verformungen und Verzerrungen richtig.

9. Bemerkungen

Wie ohne weiteres aus ihrer Herleitung hervorgeht, beruhen die Sätze 7 und 8 auf der Voraussetzung, dass die Zerlegung des Verformungszustandes in seinen elastischen und plastischen Anteil nach den in Abschnitt 5 angegebenen Regeln vorgenommen worden ist. Es ist nicht schwer, die Gültigkeit insbesondere des letzten Satzes am Beispiel von Abschnitt 4 bzw. 6 zu überprüfen³⁾.

Die Tatsache, dass die Sätze 1 bis 3 nicht nur für den starr-plastischen, sondern auch dem elastisch-plastischen Körper gelten, darf indessen nicht zur Annahme verleiten, dass die praktische Behandlung konkreter Probleme in den beiden Fällen gleich einfach sei. Die beiden Sätze verknüpfen lediglich das verallgemeinerte plastische Verformungszinkrement mit der Fliessgrenze; diese selbst muss aber vermitteltst einer Diskussion des ganzen Spannungszustandes \mathbf{S} gefunden werden und lässt sich auf Grund der verallgemeinerten Spannungen \mathbf{Q} allein nicht erhalten. Beim starr-idealplastischen Körper ist das, wie ja schon das Beispiel in Abschnitt 4 zeigt, eine Aufgabe, die nur einmal zu lösen ist, da es hier nur einen einzigen, festen aplastischen Bereich gibt. Beim elastisch-idealplastischen Körper dagegen deformiert sich der aplastische Bereich, und

³⁾ Die hier unterdrückte Kontrolle ist mit Unterstützung durch die Herren Dipl. Math. W. Issler und Dipl. Ing. H. M. Fischer ausgeführt worden, denen der Verfasser auch die kritische Durchsicht des Manuskripts verdankt.

es muss daher nicht nur Schritt für Schritt das verallgemeinerte plastische Verformungsinkrement auf Grund der Sätze 1 bis 3 neu ermittelt, sondern laufend unter Rückkehr zum wirklichen Spannungszustand auch die sich wandelnde Form der Fließgrenze erschlossen werden. Für den elastisch-plastischen Körper bedeutet daher die Behandlung in verallgemeinerten Grössen lange nicht dieselbe Vereinfachung wie im starr-plastischen Fall.

Abstract

The author has recently shown that v. MISES' theory of the plastic potential, if valid for the elements of a rigid-plastic body, also holds for the representation in generalized strains and stresses. This paper supplies the analogous proof for an elastic-plastic body. Here, however, the yield surface deforms, even in the case of perfect plasticity. Besides, it is impossible to determine the shape of the yield surface without considering the real state of stress. Thus, the simplification resulting from the use of generalized coordinates is less than in the case of a rigid-plastic body.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [2] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Birkhäuser, Basel 1955), S. 19.
- [2a] J. F. W. BISHOP, and R. HILL, *A Theory of the Elastic Distortion of a Polycrystalline Aggregate under Combined Stresses*, Phil. Mag. [7] 42, 414 (1951).
- [3] D. C. DRUCKER, *Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity*, Quart. appl. Math. 7, 411 (1949).
- [4] H. ZIEGLER, *An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and its Significance for Rheological Problems*, Ackeret-Festschrift, Z. angew. Math. Phys. 9b, 748 (1958).
- [5] H. ZIEGLER, *Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines starr-plastischen Körpers und seinem Fließgesetz*, Z. angew. Math. Phys. 11, 413 (1960).
- [6] J. L. SYNGE, *The Hypercircle in Mathematical Physics* (Cambridge, University Press 1957).

(Eingegangen: 19. Mai 1960.)

A Further Note on a Two-Dimensional Free-Boundary Problem

By R. P. GILBERT, East Lansing, Michigan, U.S.A.¹⁾ and
H. KENDALL, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A.²⁾

In a recent paper³⁾, we obtained the following expression for the free-boundary between two fluids under dynamic conditions in a bent channel:

$$x = x_c + \frac{1}{\pi} \int_{y_c}^y \left[\cosh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{K_1^2 - K_2^2}} \frac{K_3 - K_4 e^{\pi \gamma y / V_\infty a}}{e^{\pi \gamma y / V_\infty a} - 1} \right) \right] dy - \left(\tanh^{-1} \frac{K_2}{K_1} \right) (y - y_c), \quad (1)$$

where

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \cosh[\pi \cot(\pi - \varphi)], & K_2 &= \sinh[\pi \cot(\pi - \varphi)], \\ K_3 &= \cos\left(\frac{\pi \gamma}{V_\infty} \sin(\pi - \varphi)\right), & \text{and } K_4 &= \cosh\left(\frac{\pi \gamma}{V_\infty}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

The boundary condition $y = y_c$ at $x = x_c$ was specified by setting $dx/dy = \cot(\varphi - \pi)$ at the point C ; this gave

$$y_c = \frac{V_\infty a}{\pi \gamma} \log \left(\frac{K_1^2 - K_2^2 + K_3}{K_1^2 - K_2^2 + K_4} \right)$$

with $x_c = y_c \cot(\varphi - \pi)$.

This note is meant to serve as a preliminary report on the numerical evaluation of Equation (1), for various physical conditions. Since all of the computations in this note were performed on a desk calculator it was necessary to limit the range of physical parameters being used. More extensive computations are presently being made on an I.B.M. 702, and these will be reported on when completed. The following magnitudes were decided upon as being reasonable values for the physical and geometric parameters:

$\varphi = \pi/2$, the angle of the channel bend;

$f = 0.25$, porosity;

$k = 100$ milli darcys, permeability;

$\mu_w = 1$ centipoise, viscosity of water;

$V_\infty = 15$ ft/year 1.44×10^{-5} cms⁻¹, velocity of the water at ∞ ;

$\varrho_w = 1.00$ g cm⁻³, density of water;

$\varrho_0 = 0.90$ g cm⁻³, density of oil;

$\gamma = (\text{kg}/\mu_w f) (\varrho_w - \varrho_0) = 3.87 \times 10^{-5}$ cms⁻¹.

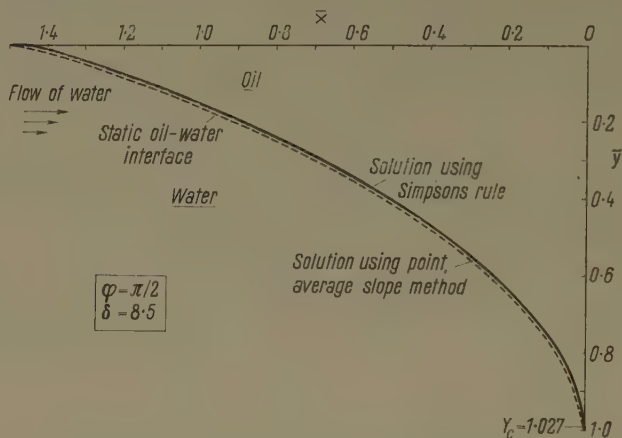
A new parameter $\delta = \gamma \pi / V_\infty = 8.5$, and the dimensionless lengths $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$ (where a is the channel width) were introduced because of their usefulness in the computations.

¹⁾ Department of Mathematics, Michigan State University.

²⁾ Department of Mathematics, University of Pittsburgh.

³⁾ R. J. BEAN, R. P. GILBERT, and H. KENDALL, *On a Two-Dimensional Free-Boundary Problem*, Z. angew. Math. Phys. 11, 341 (1960).

Equation (1) has been evaluated by a two point SIMPSON's rule employing variable interval sizes; a check has been obtained by rewriting this equation in its derivative form and proceeding from point to point with an average slope. Below is a figure of both these curves.



Zusammenfassung

Diese Notiz enthält eine numerische Illustration zur Veröffentlichung *On a Two-Dimensional Free-Boundary Problem*. Dabei wird vermittelst numerischer Integration der in der erwähnten Schrift vorkommenden Differentialgleichung der Fall eines Kanals mit einer Krümmung von 90° behandelt. Es ist beabsichtigt, zu einem späteren Zeitpunkt eine umfassendere Darstellung der Lösungen dieser Differentialgleichung zu veröffentlichen.

(Received: September 12, 1960.)

Ségrégation d'impuretés dans la glace

Par CLAUDE JACCARD et LAURA LEVI, Zurich¹⁾

1. Introduction et théorie

Dans les travaux antérieurs [1, 2]²⁾ nous avons examiné les propriétés électriques de la glace dotée d'acide fluorhydrique, et indiqué une méthode de production de spécimens unicristallins. Toutefois l'ignorance du coefficient de ségrégation et des conditions précises de la croissance ne permettait pas d'obtenir des cristaux de concentration prescrite. C'est pour combler cette lacune que les recherches exposées ci-dessous ont été entreprises.

¹⁾ Institut de Physique de l'E.P.F., Zurich; actuellement Institut fédéral pour l'étude de la neige et des avalanches, Weissfluhjoch/Davos, respectivement Instituto de Física de la Atmósfera, Buenos Aires, Argentine.

²⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 76.

1.1. Le *problème théorique* est le même que celui qui se pose pour la purification d'éléments semi-conducteurs et a déjà été traité sous certains aspects dans des ouvrages spécialisés [3]. Cependant, comme la diffusion des impuretés est beaucoup plus faible dans l'eau à 0°C que dans les composés à point de fusion élevé, les conditions de la ségrégation effective sont différentes. Une solution approchée a déjà été calculée par POHL [4], mais elle n'est valable que pour une concentration initiale homogène dans le liquide, et seulement une fois que la cristallisation a progressé d'une certaine distance; nous avons repris l'étude détaillée du phénomène (dans un cas à une dimension) cherchant la concentration à n'importe quel endroit du cristal. En supposant que la solution s'étende jusqu'à l'infini, que la convection soit négligeable et que le cristal croisse le long de l'abscisse x à une vitesse v constante, on cherche la répartition exacte des impuretés dans le liquide $n(x, t)$ en connaissant le coefficient de diffusion D (pratiquement nul dans le solide) et le coefficient de ségrégation $S \equiv 1/s$ (rapport de la concentration de la solution n à celle de la glace à l'interphase n_g). Pour cela il faut résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

avec la répartition initiale $n(x, t = 0) = n_\infty + n_1(x)$ et, en assignant l'abscisse vt à l'interphase, puisque les impuretés rejetées par le cristal sont emportées par le courant de diffusion:

$$x = vt: \quad n v (1 - s) + D \frac{\partial n}{\partial x} = 0,$$

$$x = \infty: \quad n = n_\infty = \text{const.}$$

Après réduction aux variables sans dimension $\xi = x v/D - t v^2/D$ (abscisse relative à l'interphase) et $\tau = t v^2/D$ on peut par une transformation de LAPLACE simplifier le problème et le résoudre. La solution peut être inversée par une intégration et donne une formule assez compliquée pour $n(\xi, \tau)$. La concentration de la glace à une distance y du point de départ de la cristallisation est alors (avec $\eta = y v/D$):

$$n_g(\eta) = s n(\xi = 0, \tau = \eta)$$

$$= n_\infty \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \sqrt{\frac{\eta}{4}} - (1 - 2s) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} (1 - 2s) \sqrt{\frac{\eta}{4}} \right] e^{-s(1-s)\eta} \right\} \\ + s \int_0^\infty F(\eta, \zeta) n_1(\zeta) d\zeta,$$

$$\text{où } \operatorname{Erfc} x = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy, \quad \text{et}$$

$$F(\eta, \zeta) = \frac{e^{-\zeta^2/4 \eta + \zeta/2 - \eta/4}}{\sqrt{\pi \eta}} + \left(\frac{1}{2} - s \right) e^{-s(1-s)\eta + s\zeta} \operatorname{Erfc} \left[(2s - 1) \sqrt{\frac{\eta}{4}} + \frac{\zeta}{\sqrt{4\eta}} \right].$$

1.2. Le plus fréquemment on part d'une *concentration homogène* dans le liquide:

$$n_1(x) \equiv 0, \quad n_\infty \neq 0.$$

La concentration croît alors de $n_g(0) = n_\infty s$ d'abord avec la racine de l'abscisse

$$n_g(\eta) \simeq n_\infty s \left[1 + 2(1-s) \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} + \dots \right], \quad (\eta \ll 4)$$

puis tend exponentiellement à sa valeur limite n_∞ :

$$n_g(\eta) \simeq n_\infty [1 - (1-2s)e^{-s(1-s)\eta} + \dots], \quad (\eta \gg 4).$$

Comme la fonction *Erfc* décroît très rapidement, et comme en général s est de l'ordre du pour cent, on arrive assez vite à la loi exponentielle, et on peut même négliger s par rapport à l'unité. Une fois l'état stationnaire atteint, la glace a la même concentration que le liquide, car il s'est formé à l'interphase une couche de concentration $S n_\infty$, décroissant exponentiellement vers n_∞ dans le liquide avec la largeur caractéristique $\xi = 1$, c'est-à-dire $x = D/v$.

1.3. Un cas particulier intéressant au point de vue expérimental est celui de la *solution agitée* plus ou moins violemment. La diffusion pure se limite alors à une couche d'épaisseur d au voisinage de l'interphase (déterminée par le brassage), la concentration du liquide étant considérée constante au delà. On peut résoudre facilement le cas stationnaire avec la condition $n = n_\infty$ pour $\xi = \delta = dv/D$, obtenant pour la concentration dans le liquide à partir de l'interphase

$$n(\xi) = n_\infty \frac{(S-1)e^{-\xi} + 1}{(S-1)e^{-\delta} + 1}, \quad 0 \leq \xi \leq \delta,$$

$$n(\xi) = n_\infty, \quad \xi > \delta.$$

La concentration de la glace est alors

$$n_g = \frac{n(0)}{S} = \frac{n_\infty}{(S-1)e^{-\delta} + 1} = \frac{n_\infty}{S^*}.$$

S^* est le coefficient de ségrégation apparent, tendant vers 1 en régime stationnaire pour d infini (pas d'agitation) et vers S pour d assez petit (agitation très violente).

2. Résultats avec l'acide fluorhydrique

Les cristaux sont produits dans l'appareil déjà décrit [2]. La concentration de l'acide est déterminée en découpant le cristal cylindrique en tranches de quelques millimètres et en mesurant la résistance de l'eau de fonte dans une cellule étalonnée. L'influence d'impuretés ioniques accidentelles ne peut pas être éliminée, et ce n'est que pour des concentrations de la glace supérieures à 10^{-7} (mol HF/mol H_2O) que la dispersion des mesures reste dans des limites acceptables.

2.1. *Sans agitation mécanique* on observe une grande influence de la vitesse de croissance sur la distribution de l'acide (Figure 1). La distance sur laquelle s'établit la concentration stationnaire étant d'après la théorie SD/v , on voit que les courbes qu'on peut faire passer par les histogrammes concordent au moins qualitativement avec ce qu'on attend. En prenant pour D une valeur de l'ordre de 10^{-5} cm²/s, et en utilisant les formules du paragraphe 1.2, on peut calculer S soit à partir du décremént des courbes, soit en extrapolant à $x = 0$, et on obtient une valeur de l'ordre de 100. Toutefois le dernier de ces procédés est inexact à moins d'avoir une vitesse de croissance très faible ($v < 0,4$ μ /s) et c'est alors la dispersion des mesures qui est

plus grande, car la convection dans le liquide a plus d'influence et suit toutes les variations fortuites de la température à la périphérie du moule. De plus pour des concentrations voisines et supérieures à 10^{-4} , la glace se trouble. On voit que les conditions expérimentales ne sont pas favorables, et c'est pour éliminer les influences incontrôlables du mouvement du liquide que nous avons essayé de l'agiter mécaniquement.

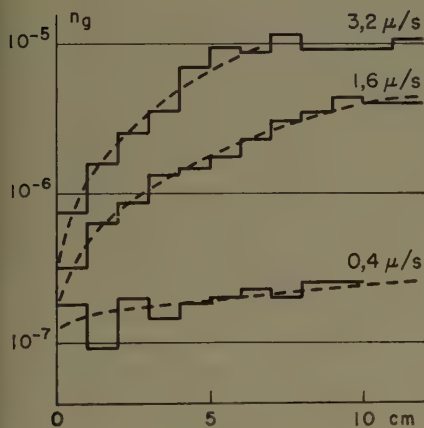


Figure 1

Distribution de l'acide fluorhydrique dans la glace avec la vitesse de croissance comme paramètre, sans agitation de la solution; $n_{\infty} = 10^{-5}$.

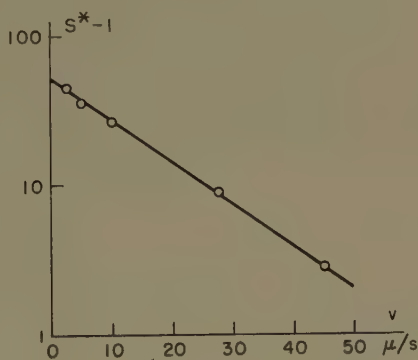


Figure 2

Coefficient de ségrégation effectif de l'acide fluorhydrique avec agitation violente de la solution; $n_{\infty} = 2 \cdot 10^{-5}$.

2.2. Avec un *brassage violent*, tel qu'il a déjà été décrit [1], la glace est claire, mais polycristalline à grain fin, et ne convient donc pas aux mesures électriques. Cependant, en reportant les valeurs du coefficient de ségrégation effectif S^* en fonction de la vitesse dans un diagramme semi-logarithmique (Figure 2), on obtient bien la formule

$$\log(S^* - 1) = \log(S - 1) - \delta, \quad \delta = \frac{v d}{D}$$

en admettant que les conditions du brassage (c'est-à-dire d) et la diffusion ne varient pas. L'extrapolation à la vitesse nulle livre $S = 60$.

2.3. Un *brassage faible* a donné les résultats les mieux reproductibles. Il est effectué par un disque de polyéthylène tournant au-dessus de l'interphase à une vitesse de quelques t/s. Pour empêcher un transport de chaleur par convection dans toute la solution et limiter ainsi l'épaisseur de la couche agitée à quelques mm, le disque est surmonté par un bouchon fixe de polyéthylène de 2 cm de long et coulissant avec un jeu de 1 mm dans le moule. Par ce procédé, on élimine la formation de bulles (qui apparaissent facilement aux vitesses supérieures à $0,5 \mu/s$ sans agitation mécanique) mais on limite généralement le volume des unicristaux au cm^3 . La distance nécessaire à l'établissement de l'état stationnaire dépassant généralement la longueur du cristal (8–12 cm), on a ainsi une faible variation de la concentration de la glace, pratiquement indépendante de la vitesse de croissance

(Figure 3) permettant ainsi la détermination de S (Figure 4). On observe une variation sensible du coefficient avec la concentration, S montant de la valeur 50 ($n_{\infty} < 10^{-5}$) à la valeur 500 pour $n_{\infty} = 3 \cdot 10^{-3}$ et descendant ensuite rapidement à 100 pour $n_{\infty} = 10^{-2}$. Dans un diagramme d'état $H_2O - HF$, cette chute correspondrait à un rapprochement des deux courbes du solide et du liquide (qui peuvent se

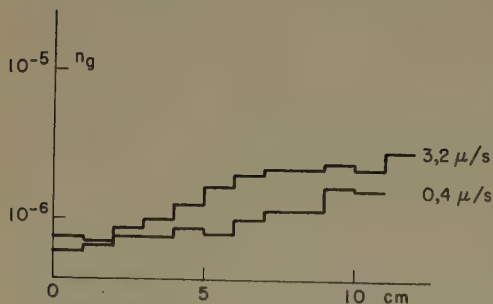


Figure 3

Distribution de l'acide fluorhydrique dans la glace pour deux vitesses de croissance, avec agitation faible de la solution; $n_{\infty} = 10^{-4}$.

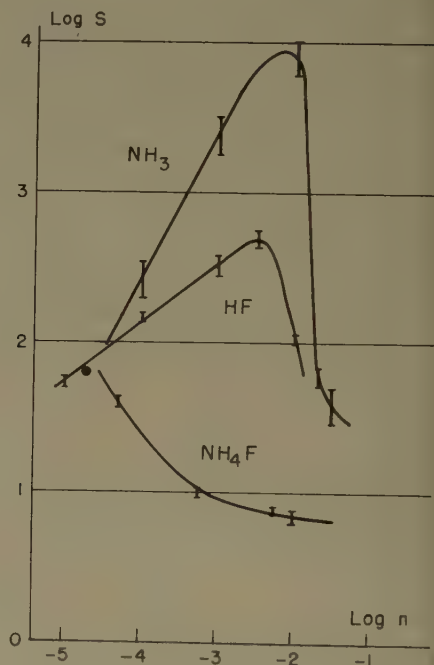


Figure 4

Coefficients de ségrégation en fonction de la concentration de la solution. (● = valeur obtenue par DECROLY et JACCARD [1]).

joindre à un point eutectique). Ce comportement semble donc caractéristique de la solution, et l'agglomération des impuretés en essaims ou sur des surfaces internes ne doit pas y jouer de rôle sensible, le trouble observé avec les grandes concentrations pouvant très bien provenir de gouttelettes liquides concentrées prises dans le réseau.

3. Résultats avec l'ammoniaque et le fluorure d'ammonium

Le coefficient de ségrégation de l'ammoniaque, déterminé par le même procédé, se comporte de la même façon (Figure 4), mais atteint des valeurs bien supérieures. Pour le fluorure d'ammonium, par contre, il est relativement petit ($S < 50$) et décroît de façon monotone. Ces résultats peuvent être comparés à ceux de BRILL et ZAROMB [4] qui, pour de faibles concentrations de NH_3 , trouvent de la glace pratiquement pure (puisque $S \sim 1000$) et pour une concentration initiale de

$2,5 \cdot 10^{-2}$ trouvent dans de la glace polycristalline $6 \cdot 10^{-4}$, ce qui donne $S = 42$. Cependant, ils estiment que les impuretés sont accumulées sur les surfaces internes, mais comme la glace obtenue dans notre cas est presque monocristalline, cette hypothèse doit être rejetée. Il en est de même de la formation d'essaims pris dans le réseau, car il est peu vraisemblable qu'elle puisse produire une variation si brusque mais continue de la ségrégation. Ainsi l'ammoniaque peut donc être pris en solution solide dans la glace jusqu'à une certaine limite. De plus, aux faibles concentrations, il semble favoriser la formation de glace pure, car des mesures électriques de cristaux faiblement dotés de NH_3 et produits rapidement donnent des résultats voisins de ceux obtenus avec de l'eau distillée, purifiée par échangeur d'ions et congelée très lentement; d'autre part, des bulles de gaz prises dans le cristal ne se produisent même pas à $3 \mu/\text{s}$.

Les valeurs de S obtenues pour le fluorure d'ammonium sont en général plus petites que celles de BRILL et ZAROMB, mais si on néglige la correction faite par ceux-ci et attribuant une certaine proportion de l'azote pris dans la glace à de l'ammoniaque accumulé sur des surfaces internes, les résultats concordent assez bien et confirment la grande solubilité du NH_4F .

4. Conclusion

Il est donc possible de produire des cristaux de glace de quelques cm de longueur avec une concentration voulue n_g , en utilisant les courbes de la Figure 4 et en partant d'une solution de concentration n_∞ telle que $n_\infty/S(n_\infty) = n_g$. Il est utile de contrôler l'agitation du liquide et la vitesse de croissance aussi exactement que possible, en maintenant celle-ci à une valeur inférieure à $0,5 \mu/\text{s}$. La facilité avec laquelle les impuretés peuvent être prises dans le réseau décroît dans l'ordre $\text{NH}_4\text{F} - \text{HF} - \text{NH}_3$, et la concentration limite de la solution (pour obtenir des cristaux clairs) est dans les trois cas $3 \cdot 10^{-2}$ environ, sans être déterminée exactement car l'appartition des bulles est progressive.

Il est remarquable qu'une faible concentration d'ammoniaque permette d'obtenir facilement des cristaux très purs avec une faible conductivité électrique. Comme l'acide carbonique est une des impuretés principales de l'eau en contact avec l'air atmosphérique, l'ammoniaque doit certainement jouer un rôle important dans l'inclusion du CO_3^{--} . WORKMAN et REYNOLDS [5], mesurant le potentiel électrique durant la croissance, trouvent en effet pour des solutions de NH_3 , $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$, H_2CO_3 , HF et NH_4F des tensions de l'eau par rapport à la glace de -230 , -109 , 0 , 0 et $+9$ volts respectivement. Il semble ainsi que le ion NH_4^+ , bien qu'il puisse a priori entrer facilement dans le réseau, empêche l'inclusion des anions (OH^- et CO_3^{--}) et que la différence de potentiel qui en résulte cause à l'interphase un appauvrissement en cations, et par conséquent un grand coefficient de ségrégation. Ceci n'explique pas toutefois le phénomène pour le HF et le NH_4F ; la couche limite pourrait être partiellement court-circuitée, diminuant la tension et cet effet pourrait être également en relation avec l'augmentation et la chute rapide du coefficient de ségrégation. Seule une étude plus approfondie des propriétés structurales et thermodynamiques de la surface peuvent donner de plus amples renseignements à ce sujet.

Nous exprimons notre gratitude à M. le Dr. H. GRÄNICHER pour ses conseils judicieux et l'intérêt constant qu'il a montré pour ces recherches. Un des auteurs (L. L.) est reconnaissant à l'Instituto de Física de la Atmósfera, Buenos Aires, d'avoir rendu possible ce travail par un stage à l'Institut de Physique de l'E.P.F., Zurich.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. C. DECROLY et C. JACCARD, *Helv. Phys. Acta* 30, 467 (1957).
- [2] C. JACCARD, *Helv. Phys. Acta* 32, 89 (1959).
- [3] W. G. PFANN, *Zone Melting* (Wiley, New York, 1958).
- [4] R. G. POHL, *J. Appl. Phys.* 25, 1170 (1954).
- [5] S. ZAROMB et R. BRILL, *J. chem. Phys.* 24, 895 (1956).
- [6] E. J. WORKMAN et S. E. REYNOLDS, *Phys. Rev.* 78, 254 (1950).

Summary

The theoretical distribution of impurities along a growing ice crystal is calculated for an arbitrary initial distribution in the liquid, and agrees qualitatively with results obtained with hydrofluoric acid. Stirring the liquid phase allows a satisfactory determination of the segregation coefficient for HF, NH_3 , and NH_4F as a function of the concentration of the solution.

(Reçu: le 6 septembre 1960.)

On the Temperature and Humidity Dependence of the Ice Forming Activity of Silver Iodide¹⁾

By ULRICH KATZ, Zürich²⁾

In a recent publication [4]³⁾, it was shown that the ice forming nucleability of a substance should be determined as a function of the temperature instead of measuring only the threshold temperature of the activity. At the same time the author described the apparatus and the method by which the activity⁴⁾ of the copper oxides and sulphides had been measured. The interesting results which were then reported naturally raised the question of the mode of action of AgI, the best known substance for forming ice embryos. Indeed, certain data were already available on this subject from other authors: for instance SMITH and HEFFERNAN [9] and SOULAGE [10] gave as a function of the temperature, the number of ice crystals which are formed in a supercooled cloud per gramm of AgI smoke in the range -4 to -20°C . The particle size spectra (where these have been measured at all, cf. SANO and FUKUTA [8]) are so broad, however, that the number of particles formed from one gramm of AgI cannot be determined with sufficient accuracy to enable the activity (in our sense) to be calculated. Nevertheless, the opinion was put forward that as the temperature is lowered the activity increases exponentially, at least above -10°C , by a factor of about 10 per 2 degrees.

Our present investigations were carried out with commercial AgI powder with which the particles entering the supercooled cloud had the range of sizes shown in

¹⁾ Paper presented at the International Congress of Cloud Physics in Verona, August 9–13, 1960.

²⁾ Laboratory of Atmospheric Physics, Swiss Federal Institute of Technology.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 79.

⁴⁾ We define the activity as the ratio of the number of ice crystals observed in a supercooled cloud to the total number of nucleating particles introduced into the cloud.

Figure 1. The measurements, carried out in the same way as described in a previous paper [4], gave the activity curve shown in Figure 2. The results mentioned above for CuS and Cu₂O [4] have been shown in broken lines for the sake of comparison. It may be pointed out that in the range -8 to -12°C CuS is just as active as AgI. In agreement with earlier authors [3, 7, 11] a threshold temperature of -3 to -4°C was obtained. These curves (Figure 2) are similar in appearance to those

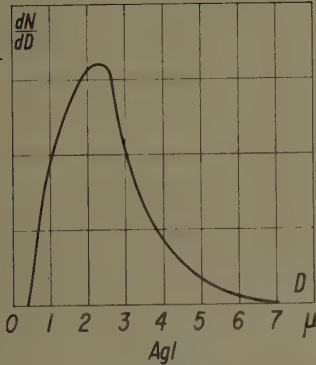


Figure 1

Relative frequency (on an arbitrary scale) of AgI powder particles of diameter D microns.

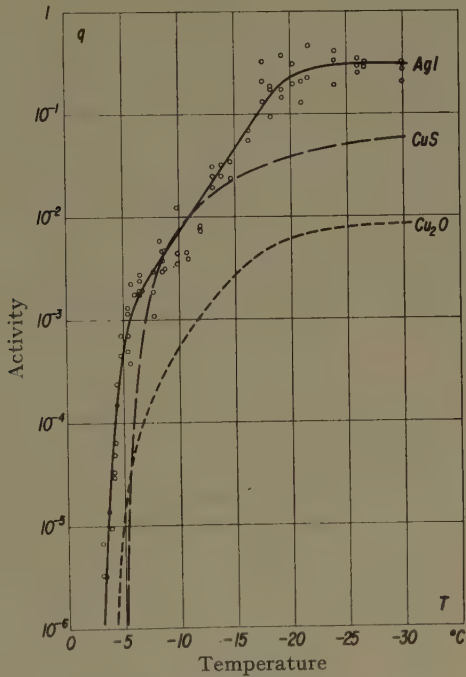


Figure 2

Ice nucleating activities q of AgI, CuS and Cu₂O as functions of temperature.

reported by SOULAGE [10], SMITH and HEFFERNAN [9] and others. The latter results have been interpreted theoretically by FLETCHER [2] in terms of the particle size distribution of the smokes: below a particle size of approximately 0.5μ , the threshold temperature decreases ever more sharply with decreasing particle diameter. For smokes with a broad particle size distribution ranging from $1/100$ to 1μ , this must lead to an effect on the activity such as that observed experimentally. However, as we used, deliberately, only particles bigger than 0.5μ for our measurements, as shown in Figure 1, FLETCHER's interpretation can only be of minor importance in our case: otherwise the activity would have to rise very steeply from the threshold temperature in order to reach the maximal value at about -6°C .

The small values of activity which were reached even at relatively low temperatures are surely the result of a small concentration of suitable sites on the surface for the formation of ice embryos. This would be in agreement with the microphoto-

graphs shown earlier by MONTMORY [6] and now also by BRYANT, HALLET, and MASON [1], where the surface concentration of such ice embryo centres on flat AgI surfaces is also rather low (order of magnitude about $10^{-3}/\mu^2$).

Whereas our measurements were, hitherto, always carried out in a supercooled water cloud, i. e. at at least 100% relative humidity, the question of the necessary water vapour pressure to form ice embryos was often considered. Assuming that the

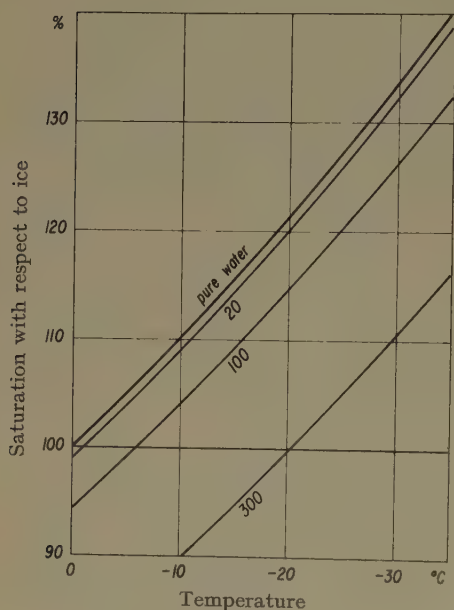


Figure 3

Vapour pressure of aqueous NaCl solutions; numbers on curves indicate g of NaCl in 1000 g of water.

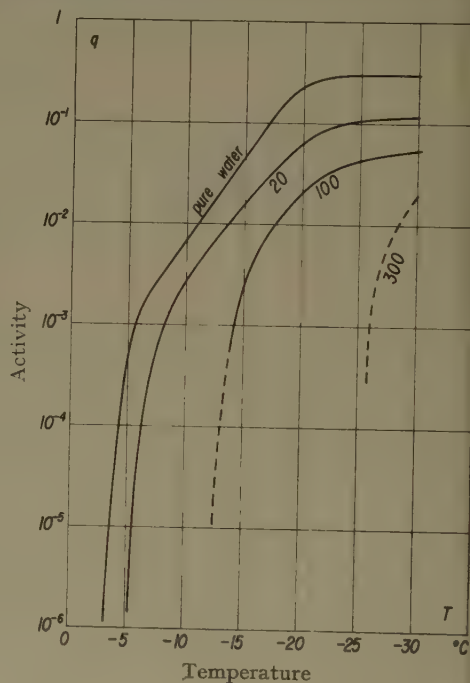


Figure 4

Ice nucleating activities of AgI in clouds of aqueous NaCl solutions as functions of temperature; numbers on curves indicate g of NaCl in 1000 g of water.

ice forming nuclei were only effective where there was water saturation, then ice nucleation must become impossible in certain maritime mists, where the drops had grown on salt nuclei, and in similar circumstances. In this connection, we carried out the following experiments:

Instead of filling the cloud chamber with a pure water cloud, we used NaCl solutions of three different concentrations corresponding to 2, 3 and 5 μ cloud droplets grown on 1 μ NaCl nuclei. Figure 3 shows the saturation vapour pressures, represented as percentages of ice saturation, as functions of temperature for the three solutions as well as for pure water. Figure 4 gives the results of the activity measurements. The curve for pure water is the same as in Figure 2. For clarity, the experimental points have not been included but the degree of scatter is the same as in Figure 2 except where the curves are broken to indicate a somewhat

greater uncertainty. This uncertainty may be partly due to the fact that the drops increase their concentration as a result of evaporation and thereby lower the vapour pressure.

It was naturally to be expected that there would be a clear shift of the threshold values to temperatures below the limit of ice saturation; yet the experiment plainly shows that the activity is also decreased over the whole temperature range even for relatively great dilutions. This may be interpreted as meaning that the nucleating activity is dependent on the vapour pressure in such a way that activity begins at a low percentage of ice supersaturation and increases with rising relative humidity. It is interesting to make a comparison with the data on AgI of MASON and VAN DEN HEUVEL, according to which water saturation is necessary down to -12°C , but below that at least 12% supersaturation with respect to ice is necessary; whereas we have found activity above -12°C with slight water undersaturation, and below -12°C with about 5 to 8% ice supersaturation. Our data indicate that AgI acts in the whole range of its ice forming activity as a sublimation nucleus.

These results are still too sparse and not accurate enough to form the basis of theoretical calculations about the influence of vapour pressure, but our experiment, which was only designed to furnish some general indications for a future line of research, does show how relative humidity plays a part in the question of icing nucleability and that, in certain cases, this matter should be taken into consideration in meteorological applications.

REFERENCES

- [1] G.W. BRYANT, J. HALLET, and B. J. MASON, *J. Phys. Chem. Solids* **72**, 189 (1959).
- [2] N.H. FLETCHER, *J. Met.* **76**, 173 (1959).
- [3] N. FUKUTA, *J. Met.* **15**, 17 (1958).
- [4] U. KATZ, *Z. angew. Math. Phys.* **11**, 237 (1960).
- [5] B. J. MASON, and A.P. VAN DEN HEUVEL, *Proc. Phys. Soc.* **74**, 744 (1959).
- [6] R. MONTMORY, *Bull. Obs. Puy de Dôme* **126** (1956).
- [7] H.R. PRUPPACHER, and R. SÄNGER, *Z. angew. Math. Phys.* **6**, 407 (1956).
- [8] I. SANO, and N. FUKUTA, *J. met. Soc. Japan*, [2], **34**, 34 (1956).
- [9] E. J. SMITH, and K. J. HEFFERNAN, *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **80**, 182 (1954).
- [10] G. SOULAGE, *Bull. Obs. Puy de Dôme* **1** (1955).
- [11] B. VONNEGUT, *Chem. Rev.* **44**, 277 (1949).

Zusammenfassung

An AgI-Pulver mit der Korngrößen-Verteilung nach Figur 1 wurde die Eiskeimbildungsaktivität in Funktion der Temperatur gemessen; Figur 2 zeigt das Resultat, das kurz diskutiert und mit Experiment und Theorie anderer Autoren verglichen wird.

Die Abhängigkeit der Aktivität vom Dampfdruck zeigte sich in einem orientierenden Versuch, bei dem der unterkühlte Nebel aus Steinsalzlösungströpfchen bestand; mit den so reduzierten Dampfdrücken gemäss Figur 3 ergaben sich die in Figur 4 dargestellten Aktivitätskurven, woraus zu schliessen ist, dass AgI im ganzen Bereich seiner Eiskeimbildungsaktivität als Sublimationskern wirkt.

(Received: August 12, 1960.)

Heat Transfer from Laminar Flow Through Cylindrical Tubes

By SERGEJ PAHOR and JANEZ STRNAD, Ljubljana¹⁾, Yugoslavia

The differential equation for heat transfer in laminar flow is

$$\operatorname{divgrad} T = \frac{\varrho c_p}{\lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} T \right) \quad (1)$$

with all physical properties (ϱ density, c_p specific heat, λ thermal conductivity) of the fluid assumed constant. For stationary flow through a cylindrical tube (diameter $2r_0$) with constant wall temperature T_w the solution is sought in the form

$$T = T_w + \sum_n C_n R_n(x) \exp(-b_n z) \quad (2)$$

where x is $x = r/r_0$. C_n are constants depending on the initial condition at the entrance of the tube. The equation for $R_n(x)$ is

$$R_n''(x) + \frac{1}{x} R_n'(x) + \left(\frac{p_n^4}{Pe^2} + p_n^2 (1 - x^2) \right) R_n(x) = 0 \quad (3)$$

with the boundary conditions

$$R_n'(0) = 0; \quad R_n(1) = 0. \quad (4)$$

Pe stands for the Peclet number $Pe = 2 \bar{v} r_0 c_p \varrho / \lambda$ (\bar{v} is the mean velocity) and p_n^2 for the eigenvalue $p_n^2 = b_n r_0 Pe$. At a sufficient distance from the entrance of the tube the temperature profile can be approximated with the first eigenfunction $R_1(x) = R(x)$. The first eigenvalue is $p_1^2 = p^2$. In most cases of technical interest the term p^4/Pe^2 can be neglected. The solutions of equation (3) and of the corresponding equation for $p^4/Pe^2 = 0$ have been calculated by various methods to different degrees of approximation [1] – [4]²⁾.

The solutions of (3) can also be expressed with confluent hypergeometric functions. This is of practical interest, because the confluent hypergeometric functions are quite well tabulated [5]. The solution $R(x)$ expressed with the confluent hypergeometric function is

$$R(x) = \exp\left(-\frac{p}{2} x^2\right) {}_1F_1(-a; 1; p x^2)$$

where

$$a = \frac{p}{4} \left(1 + \frac{p^2}{Pe^2} \right) - \frac{1}{2}.$$

The first boundary condition is satisfied already and from the second boundary condition it follows

$${}_1F_1(-a; 1; p) = 0. \quad (5)$$

Using tables [5] the calculation of the relation between the first eigenvalue p^2 and Pe is straightforward.

¹⁾ Institute of Physics, University of Ljubljana.

²⁾ Numbers in brackets refer to references at the end of the paper.

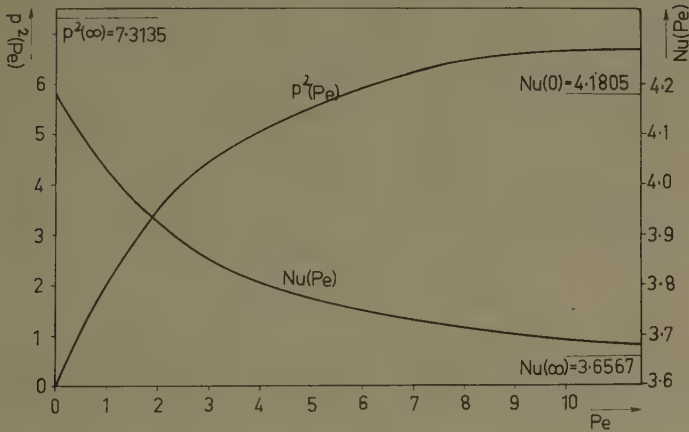
The Nusselt number is defined [3, 4] by

$$Nu = \frac{1}{2} p^2 \left(1 + \frac{p^2 K}{Pe^2} \right). \tag{6}$$

The value of K

$$K(Pe) = \int_0^1 R(x) x \, dx \left(\int_0^1 R(x) (1 - x^2) x \, dx \right)^{-1}$$

is almost constant, e. g. $K(0) = 1.445$ and $K(\infty) = 1.419$. Therefore we get quite a good approximation for Nu , at least for great values of Pe , if we insert in the equation (6) $K = K(\infty)$. If greater accuracy is desired the value of Nu for various Pe can be calculated with the aid of tables.



Figure

The functions $p^2(Pe)$ and $Nu(Pe)$.

$Nu(Pe)$ was calculated from equation (6) with an approximation $K(Pe) = K(\infty) (1 + 0.0032 p^4 / Pe^2)$.

REFERENCES

[1] H. A. LAUWERIER, *Appl. Sci. Res.*, A 2, 184 (1951).
[2] J. R. SELLARS *et al.*, *Trans. ASME* 78, 441 (1956).
[3] S. PAHOR and J. STERNAD, *Z. angew. Math. Phys.* 7, 536 (1956).
[4] S. N. SINGH, *Appl. Sci. Res.* A 7, 325 (1958).
[5] L. J. SLATER, *Confluent Hypergeometric Functions* (Cambridge 1960).

Zusammenfassung

Die Differentialgleichung für Wärmeleitung in einer durch ein zylindrisches Rohr strömenden Flüssigkeit, die wie bekannt schon öfters behandelt wurde, wird in der vorliegenden Arbeit mittels der konfluenten hypergeometrischen Funktion gelöst. Bei der Berechnung des ersten Eigenwertes wird von den neulich herausgegebenen Tafeln Gebrauch gemacht.

(Received, August 8, 1960.)

Electron Density Distribution in a Cylinder¹⁾

By HELMUT D. WEYMANN, College Park, Md., USA²⁾

Introduction

In experimental studies of electron diffusion from argon plasmas in shock tubes it was found that appreciable electron concentrations can be measured up to 1 m ahead of the shock front [1]³⁾. A complete theoretical description of this nonstationary diffusion process is very difficult, as the diffusion differential equation is nonlinear due to the electric force on the electrons. The electric field, generated by the charge separation, is moreover, strongly three-dimensional. There is, however, one aspect of the problem which is amenable to a theoretical treatment. As the tube diameter is very small (about 3 cm) compared with the axial extension of the phenomenon (about 100 cm) it may be assumed that the diffusing electrons will establish a quasi-equilibrium density distribution in the radial direction in all but the region directly ahead of the shock. The radial distribution at a given point and instant can then be approximated by the stationary radial distribution of electrons in an infinitely long cylinder provided the mean density over the cross section is the same in both cases. This is the problem considered here.

Electron Density Distribution

The aim of the following calculations is to determine the equilibrium density distribution of electrons of a given temperature T in an infinitely long insulating cylindrical tube of radius R , which is capable of withstanding any field strength. There may be a background of neutral gas in the cylinder. It is, however, assumed that no positive ions are present.

The differential equation for our problem can be found easily. It is known that the electron density as a function of the (diffusion) potential is given by a Boltzman distribution⁴⁾

$$n_e = n^* \exp\left(\frac{e\psi}{kT}\right), \quad (1)$$

(ψ = potential, k = Boltzmann constant, T = electron temperature, e = charge of an electron, n^* = electron density at $\psi = 0$). In addition one has Poisson's equation which, in the absence of positive ions, assumes the form

$$\Delta\psi = \frac{e n_e}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

¹⁾ This research was supported in part by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract No. AF 49(638)-401.

²⁾ Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland; now at the University of Rochester, Rochester, N. Y., USA.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 85.

⁴⁾ In equilibrium the pressure force on the electrons: $-\text{grad } p = -kT \text{ grad } n$ is equal and opposite to the electrical force $-neE = -ne \text{ grad } \psi$. Hence $n^{-1} \text{ grad } n = (e/kT) \text{ grad } \psi$, which, for $T = \text{const}$, can be integrated to give equation (1).

(The dielectric constant of the background gas has been set equal to unity.) The Laplacian operator in cylindrical coordinates is

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}.$$

With the assumed cylindrical symmetry and independence of z equations (1) and (2) then result in

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \frac{e n^*}{\varepsilon_0} \exp\left(\frac{e \psi}{k T}\right). \quad (3)$$

By substituting

$$\frac{e \psi}{k T} = u \quad \text{and} \quad \frac{e^2 n^*}{\varepsilon_0 k T} = 2 \lambda \quad (4)$$

into equation (3) we obtain

$$u'' + \frac{u'}{\varrho} = 2 \lambda e^u. \quad (5)$$

Equations of this type have been investigated by LEMKE [2]. He showed that equation (5) can be brought into the form

$$u'' - \frac{1}{2} (u')^2 - \frac{u'}{\varrho} - \frac{C}{\varrho^2} = 0, \quad (6)$$

(C = constant of integration not directly related to λ)

which is a Riccati differential equation in u' . With the transformation

$$u = -2 \ln w + \ln \tau \quad (\tau = \text{constant}) \quad (7)$$

equation (6) goes over into the linear differential equation

$$w'' - \frac{w'}{\varrho} + \frac{w C}{2 \varrho^2} = 0. \quad (8)$$

A solution of equation (8) is

$$w = \gamma_1 \varrho^{\beta_1} + \gamma_2 \varrho^{\beta_2} \quad (9)$$

where $\beta_{1,2}$ are the solutions of the characteristic equation

$$\beta^2 - 2\beta + \frac{C}{2} = 0$$

and hence

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \left(1 - \frac{C}{2}\right)^{1/2}. \quad (10)$$

The value of τ in equation (7) can be determined by substituting equation (9) into equation (7) and in turn equation (7) into equation (5). This results in

$$\tau = -\gamma_1 \gamma_2 \frac{4 - 2C}{\lambda}. \quad (11)$$

Hence from equations (7), (9), and (11)

$$u = -2 \ln (\gamma_1 \varrho^{\beta_1} + \gamma_2 \varrho^{\beta_2}) + \ln \left(-\gamma_1 \gamma_2 \frac{4 - 2C}{\lambda} \right). \quad (12)$$

The value of the integration constant C can now be determined by the following consideration. As the potential $\psi = u k T / e$ must remain finite at $\varrho = 0$ either β_1

or β_2 has to be zero and the other must be greater than zero (see equation (12)). A comparison with equation (10) shows that the only value of C for which one of the β is zero is $C = 0$. Then $\beta_2 = 0$ and $\beta_1 = 2$. For convenience we shall assume further that $\psi = u = 0$ for $\varrho = 0$. From equation (12) follows then

$$\gamma_2^2 = - \frac{4 \gamma_1 \gamma_2}{\lambda} \quad (13a)$$

and with equation (4)

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = - \frac{\lambda}{4} = - \frac{e^2 n^*}{8 \varepsilon_0 k T} \quad (13b)$$

Introducing these relations for β_1 , β_2 , C , and γ_1/γ_2 into equation (12) gives

$$u = \frac{\psi e}{k T} = - 2 \ln \left(1 - \frac{\varrho^2}{8 l_D^2} \right) \quad (14a)$$

where

$$l_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{e^2 n^*} \quad (14b)$$

the Debye length, is defined with n^* the electron density for $\psi = 0$ at $\varrho = 0$.

The electron density distribution is found by substituting equation (14a) into equation (1) which gives

$$n_e = \frac{n^*}{(1 - \varrho^2/8 l_D^2)^2}, \quad (15)$$

where n^* and l_D are quantities which as yet have to be determined. As n_e has to remain finite for $0 < \varrho < R$, the Debye length can assume only values which satisfy the inequality

$$\frac{R^2}{8 l_D^2} < 1, \quad (16)$$

or with equation (14b)

$$n^* < \frac{8 \varepsilon_0 k T}{e^2 R^2} = n_{\max}^* \quad (17)$$

The maximum value which the electron density can assume at $\varrho = 0$ is, therefore, determined by the temperature and the tube radius.

Now we shall derive a relation between n^* and the mean density for a cross section

$$n = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2 \pi \varrho d\varrho n_e(\varrho). \quad (18)$$

After introducing equation (15) into equation (18) and integrating, one obtains

$$n = \frac{n^*}{1 - R^2/8 l_D^2}. \quad (19)$$

By using equation (14b), one finally arrives at

$$n^* = \frac{n}{1 + R^2 e^2 n / 8 k T \varepsilon_0}, \quad (20)$$

where n^* the electron density at $\varrho = 0$ is given as a function of the mean density n , the cylinder radius R and the electron temperature T .

In Figure 1 several density profiles have been plotted for a cylinder of radius 1 cm and an electron temperature of $T = 10^4$ ° K. For these values l_D^2 has to be larger than 0.125 cm², which in turn means that the upper limit for n^* is

$$n_{max}^* = 3.81 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}.$$

Figure 1 shows that for $\bar{n} < n_{max}^*$ the electron density is nearly independent of ρ . For $n > n_{max}^*$ the density at the center approaches n_{max}^* while the density at the wall increases with the square of \bar{n} which can be verified by substituting equations (14b) and (20) into equation (15). This results in

$$n(R) = \bar{n} \left(1 + \frac{R^2 e^2 \bar{n}}{8 k T \epsilon_0} \right) \approx \frac{n^2 R^2 e^2}{8 k T \epsilon_0}. \quad (21)$$

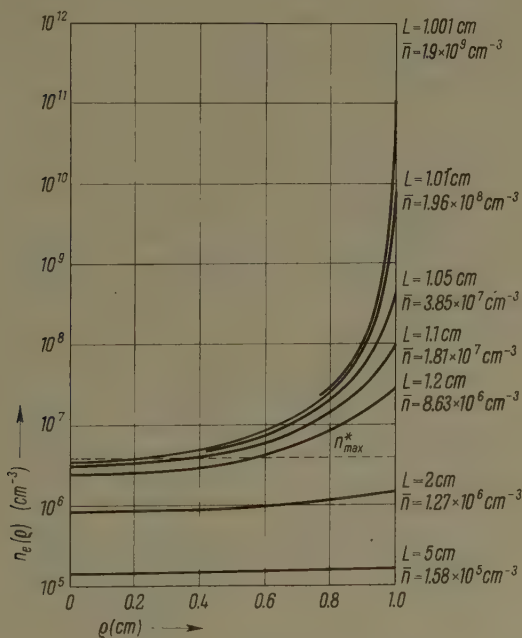


Figure 1

Radial electron density profiles in an infinitely long cylinder (Electron temperature $T_e = 10^4$ ° K; $L^2 = 8 l_D^2$).

REFERENCES

- [1] H. D. WEYMANN, *Electron Diffusion Ahead of Shock Waves in Argon*, Physics of Fluids, 3, 545–548 (1960).
- [2] H. LEMKE, *Differentialgleichungen für das Gleichgewicht eines gasförmigen Himmelskörpers*, J. reine angew. Math., 142, 118–145 (1913).

Zusammenfassung

Die radiale Elektronendichteverteilung in einem unendlich langen Zylinder wird für den Gleichgewichtsfall berechnet. Dabei ergibt sich die Existenz einer maximalen Dichte n_{max}^* , welchem Wert die Dichte in der Achse des Zylinders zustrebt, wenn die mittlere Dichte \bar{n} im Querschnitt gegen unendlich geht. Figur 1 zeigt, dass für $\bar{n} < n_{max}^*$ die Dichte über den Querschnitt praktisch konstant ist. Für $\bar{n} > n_{max}^*$ steigt die Dichte an der Wand mit \bar{n}^2 an.

(Received: July 5, 1960).

Varia – Miscellaneous – Divers

Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma in New York City

The eleventh annual international Polytechnic Institute of Brooklyn Symposium, scheduled for April 4–6, 1961 in New York City, will be devoted to 'Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma'. The area of interest covers collective electromagnetic and fluid dynamic phenomena and their self-consistent analytical description in the temperature range characteristic of the transition between partially and fully ionized gaseous plasmas.

The symposium is being organized by the Department of Aerospace Engineering and the Microwave Research Institute of the Polytechnic Institute of Brooklyn in cooperation with the Institute of Radio Engineers and the Institute of the Aeronautical Sciences and with the co-sponsorship of the Air Force Office of Scientific Research, the Office of Naval Research, and the U. S. Army Signal Corps.

Symposium Committee
Polytechnic Institute of Brooklyn
55 Johnson Street,
Brooklyn 1, New York

Mathematisches Symposium des internationalen Rechenzentrums der UNESCO (PICC) in Rom, 22. bis 24. September 1960

Das Thema des Symposiums war die numerische Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und von Integral- und Integro-Differentialgleichungen. Hauptvorträge wurden von Prof. R. COURANT (New York), Herrn GENUYS (Paris) und Prof. WALTHER (Darmstadt) gehalten und ausserdem etwa 50 spezielle Vorträge von Fachleuten aus den verschiedensten Ländern.

Der Kongressbericht (Proceedings) wird demnächst im Birkhäuser Verlag (Basel und Stuttgart) erscheinen.

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Mathematics in Physics and Engineering. Von J. IRVING und N. MULLINEUX (Academic Press, New York und London 1959). 883 S., 105 Abb.; \$11.50.

Als Band 6 der Reihe «Pure and Applied Physics» erschienen, möchte das Buch von IRVING und MULLINEUX dem angehenden Physiker und Ingenieur das heutzutage erforderliche Rüstzeug an Kenntnissen aus der Mathematik vermitteln. Das Hauptgewicht der Darstellung wird von den Verfassern naturgemäss auf die Anwendung der verschiedenen mathematischen Methoden auf die Probleme der Physik gelegt, wobei diese dem Gebiet der Elastizität, der Überschallströmung, des Elektromagnetismus, der Wellenmechanik und der Wärmeleitung entnommen wurden, und weniger auf rein mathematische Fragen. Einige weitergehende mathematische Ausführungen wurden deshalb in einen Anhang verwiesen. Im wesentlichen sind die folgenden Gebiete behandelt: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, spezielle Funktionen, Transformationstheorie, Matrizen, Variationsrechnung, Funktionentheorie, Differenzenrechnung, Integralgleichungen und numerische Methoden. Diese Übersicht zeigt, dass der Rahmen recht weit gespannt ist, aber dem entspricht, was heute gefordert werden muss. Als Lehrbuch enthält das Werk zu allen Abschnitten neben vielen, mehr oder weniger weitgehend durchgerechneten Beispielen auch zahlreiche Übungsaufgaben (deren Lösungen anhangsweise beigelegt sind) sowie einige ausgewählte bibliographische Hinweise auf ausführlichere Spezialwerke. – Als Ganzes gesehen, handelt es sich um ein recht sorgfältig und auf Grund einer reichen Erfahrung zusammengestelltes einführendes Werk, das den angestrebten Zweck sehr wohl zu erfüllen vermag.

E. ROTH-DESMEULES

Thermische Turbomaschinen. Dampfturbinen, Gasturbinen, Turboverdichter. – Von WALTER TRAUPEL. Bd. 1: Thermodynamisch-strömungstechnische Berechnung (Springer-Verlag, Berlin 1958). 407 Seiten, 402 Abb., sFr. 62.85.

Prof. Dr. WALTER TRAUPEL, Inhaber des Lehrstuhls für thermischen Maschinenbau an der ETH in Zürich, hat unter Verarbeitung letzter Erkenntnisse aus Thermodynamik und Strömungslehre ein neues Standardwerk über den thermischen Turbomaschinenbau herausgegeben. Im ersten Band werden in elf Kapiteln, welche in sich abgeschlossene Einheiten bilden, die thermodynamischen Grundlagen, die Berechnung der Arbeitsprozesse, die strömungstechnischen Grundlagen, die Arbeitsverfahren thermischer Turbomaschinen, die elementare Theorie der Stufe, das Schaufelgitter, die räumliche Strömung durch Turbomaschinen, die Berechnungsunterlagen, die Auslegung der mehrstufigen Maschine, Wellendichtungen und Schubausgleich sowie das Verhalten der Turbomaschinen unter geänderten Betriebsbedingungen behandelt. Jedem Abschnitt ist ein Literaturverzeichnis beigelegt, welches dem Fachmann ein vertieftes Studium der in ihrer Gesamtheit dargestellten Probleme ermöglicht. Von unmittelbarer Aktualität sind, im Zusammenhang mit dem Einsatz der Atomenergie, die Ausführungen über Nassdampfturbinen. Turbine und Verdichter werden auf einheitlicher Grundlage völlig analog behandelt, was gegenüber den bekannten historischen Darstellungsarten einige Umstellungen bringt. Das Buch von Traupel zeichnet sich durch einen streng logischen Aufbau, seine klare Sprache und die systematische Anwendung des MKSA-Systems aus. Einleitend werden die einfachen Regeln für die Umrechnung in das technische Maßsystem mitgeteilt. Die erwähnten Vorzüge erleichtern dem Studierenden, wel-

cher sich erstmals mit dem thermischen Turbomaschinenbau zu befassen hat, das Eindringen in die neue Materie ausserordentlich. Aber auch dem in der Industrie tätigen Ingenieur bietet das Buch von Traupel durch seine exakte Erfassung der Einzelprobleme eine Fülle von Anregungen. Die praktische Anwendung der entwickelten verfeinerten Theorie dürfte zu weiteren Verbesserungen der thermischen Maschinen führen. In einer Zeit, die ein Überangebot an beschreibenden Sammelwerken kennt, bedeutet das Lehrbuch von Traupel, welches in gedrängter und gut verständlicher Form jeweils das Wesentliche der einzelnen Probleme erfasst, einen Lichtblick.

W. R. DUBS

Praxis der konformen Abbildung. Von W. VON KOPPENFELS und F. STALLMANN ([Band 100 der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften] Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959). 375 S., 250 Abb.; DM 69.-.

Das ursprünglich von W. VON KOPPENFELS begonnene und in erster Linie als Nachschlagewerk geplante Buch, dessen Bearbeitung schliesslich STALLMANN besorgte, vermittelt in einem ersten, sorgfältig ausgewogenen Teil das Wichtigste aus der allgemeinen Theorie der konformen Abbildung, nämlich über komplexe Funktionen, konforme Abbildungen durch spezielle Funktionen, Potential- und Funktionentheorie, Theorie und Praxis der Polygonabbildungen und die verschiedenen Näherungsverfahren. Der zweite Teil enthält dann den Katalog der wichtigsten konformen Abbildungen. Dabei werden die Abbildungsfunktionen explizit angegeben und, soweit dies überhaupt möglich ist, auch die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern untersucht. Die Zusammenstellung erstreckt sich auf Zweiecke, Geraden- und Kreisbogendreiecke, ein- und zweiteilige Geradenvierecke, Kreisbogenvierecke, Kegelschnittpolygone und -schlitze, Parallel- und Geradenschlitze, konzentrische Kreisbogenschlitze. Die sorgfältige und eingehende Darstellung macht das Buch, dessen Ausstattung hervorragend ist, zu einem wichtigen Handbuch und Nachschlagewerk, das für die Praxis der konformen Abbildung ein unentbehrliches Hilfsmittel sein wird.

E. ROTH-DESMEULES

Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume. Heft 24: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Von D. A. KAPPOS (Springer-Verlag, Berlin 1960). 136 S.; DM 21.80.

Der Verfasser hat schon 1948 [Zur Math. Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Sitzungsberichte der Bayrischen Akad. der Wissenschaften, 1948] ein Wahrscheinlichkeitsfeld erklärt als eine additive, normierte, strikt positive reelle Funktion auf einem Boolring mit Eins, und dabei die Vorteile dieser Methode hervorgehoben, die z. B. vermeidet, dass ein Ereignis die Wahrscheinlichkeit Null hat, ohne aber das leere Ereignis zu sein. Im vorliegenden Ergebnisheft 24 werden unter Zugrundelegung dieser neuern Axiomatik Ergebnisse von Untersuchungen über Strukturfragen der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume zusammengestellt. Nach den Definitionen und Beispielen des 1. Kapitels wird im 2. Kapitel die Erweiterung zu einem σ -additiven Wahrscheinlichkeitsfeld gebracht. Das 3. Kapitel zeigt den Übergang von der klassischen Theorie zur vorliegenden durch Quotientenbildung modulo dem Ideal der Nullmengen und umgekehrt die Darstellung eines Wahrscheinlichkeitsfeldes vermöge des Stoneschen Satzes durch einen Mengenkörper, auf dem eine σ -additive Mengenfunktion definiert ist. Die Kapitel 4 bis 7 behandeln kartesische Produkte und verschiedene Arten der Unabhängigkeit. Nach dem 7. Kapitel über topologische bzw. kompakte Wahrscheinlichkeitsräume wird im letzten Kapitel noch der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeitsräume vorgeführt.

H. MATZINGER

Neuerscheinung

KOWALSKY

TOPOLOGISCHE RÄUME

Von Prof. Dr. H.-J. Kowalsky, Professor an der Universität Erlangen
271 Seiten, Preis Fr./DM 40.–

*Mathematische Reihe, Band 26, Sammlung «Lehrbücher und Monographien
aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»*

Inhalt: I. Grundlagen: Mengen, Verbände, Filter. II. Topologische Räume: Zusammenhang zwischen Topologie und Grenzwert, Grundbegriffe, Trennungseigenschaften, Mächtigkeitsbedingungen. III. Kompaktheit und Zusammenhang (einschliesslich lokaler Begriffe und parakompakter Räume). IV. Abbildungen: Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen, Homöomorphie, vollständig reguläre Räume, Quotienten-, Produkt-, Summen- und Abbildungsräume. V. Erweiterung und Kennzeichnung topologischer Räume: Allgemeines Erweiterungsprinzip, Kompaktifizierung, Einbettungs- und Darstellungssätze. VI. Metrische und uniforme Räume: Metrisierung, Gleichmässigkeit, Vervollständigung. VII. Topologische Gruppen, Anwendungen: Grundbegriffe aus der Theorie der topologischen Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume, Approximationssatz von Stone-Weierstrass, induktiver und inverser Limes.

Das vorliegende Lehrbuch soll in die mengentheoretische Topologie einführen. Ausgangspunkt ist eine Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs, die einen natürlichen Zugang zu den topologischen Räumen vermittelt. Kennzeichnend für die Darstellung ist die weitgehende Verwendung der Filter, die nicht nur eine übersichtliche Schreibweise und Begriffsbildung, sondern auch eine formale Beweisführung ermöglichen. Die Stoffauswahl wird durch Hinweise und Aufgaben am Ende eines jeden Paragraphen ergänzt.

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung – Obtainable from your bookseller –
Commandes à votre librairie*

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

FILED IN STACKS

Neuerscheinung

Statistische Methoden

für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure

von

ARTHUR LINDER

Professor an der Universität Genf und an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Dritte, umgearbeitete und stark erweiterte Ausgabe

(1960) 484 Seiten mit 58 Figuren und 73 Beispielen. In Ganzleinen Fr. 54.- (DM 54.-)

Mathematische Reihe, Band 3, Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»

Angesichts der unvermindert anhaltenden Nachfrage hat sich der Verfasser entschlossen, seine bekannte Einführung in die neueren Methoden der mathematischen Statistik stark zu erweitern. Gleichzeitig wurde der den Anwendungen gewidmete Teil des Buches völlig umgestaltet.

Neu aufgenommen wurden unter anderem: Verschiedene Anwendungen von Chiquadrat, die Streuungszерlegung bei ungleichen Klassenhäufigkeiten, die Bestimmung von Streuungskomponenten, die nichtlineare Regression, die «analysis of covariance», das Schätzen von Parametern und einige Transformationen von Prozentzahlen (Arc sin, Probit, Logit, Loglog).

1959 erschien vom gleichen Autor:

Planen und Auswerten von Versuchen

Eine Einführung für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure

2. Auflage, 182 Seiten mit 9 Fig., Ganzleinen Fr./DM 21.- (1959)

Reihe der experimentellen Biologie Band 13, Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»

Diese Einführung richtet sich an Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure; sie setzt keine Kenntnis in mathematischer Statistik voraus. Der Leser wird angeleitet, Versuche richtig zu planen und einwandfrei auszuwerten. Die gründlich durchgearbeiteten Anwendungsbeispiele aus der biologischen, medizinischen, industriellen und landwirtschaftlichen Forschung bilden einen wichtigen Bestandteil des Buches.

1961 erscheint vom gleichen Autor:

Handliche Sammlung mathematisch-statistischer Tafeln

40 Seiten, Fr./DM 4,50

Die vorliegende Sammlung statistischer Tafeln soll die umfangreicheren, bisher erschienen nicht ersetzen: sie stellt vielmehr einen handlichen Auszug der am meisten verwendeten Tafeln dar, die dazu bestimmt sind, stets griffbereit auf dem Arbeitstisch zu liegen. Ausser den Tafeln von t , χ^2 und F enthält diese Sammlung Tafeln für die Transformationen von Prozentzahlen mittels Arcus sinus, Probits, Logits und Loglog, sowie Tafeln für zufällig angeordnete Zahlen, die besonders beim Planen von Versuchen und Stichprobenerhebungen zu benutzen sind.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung - Obtainable from your bookseller

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART